ТЕХНИЧЕСКИ УНИВЕРСИТЕТ – СОФИЯ

Ръководство по Математически анализ 2 с помощта на MAPLE

Йорданка Панева-Коновска

Татяна Станчева

София, 2014

ТЕХНИЧЕСКИ УНИВЕРСИТЕТ - СОФИЯ

Ръководство по Математически анализ 2 с помощта на MAPLE

Йорданка Панева-Коновска Татяна Станчева

София, 2014

Издаването на това ръководство е подпомогнато със средства от бюджетната субсидия на ТУ – София за издаване на учебници и научни трудове за 2014 година.

СЪДЪРЖАНИЕ

Предговор

Учебното помагало е предназначено за студентите от специалност Приложна математика и информатика, втори семестър. То може да се използва от всеки, който желае да обогати знанията си в областта на математиката и приложението ѝ във физиката и инженерните науки.

Maple, наред с Mathematica, е един от най-популярните представители на така наречените системи за компютърна алгебра (CAS - computer algebra system). Други такива са Axiom, Magma, Sage.

Това, което ги характеризира, е интегрирането в едно на възможности като удобен потребителски интерфейс, символни преобразувания, език за програмиране и интерпретатор за него, изчисления с произволна точност и богати 2D и 3D графични средства.

Съществуват и други софтуерни продукти, някои от които, като MATLAB например, са мощни средства за научни изследвания, свързани с математически изчисления, но не се вписват във всички изисквания на CAS.

Това, което отличава Maple от други продукти и което го е направило особено популярен за прилагане в обучението, е лекотата, с която всеки начинаещ потребител може да започне работа с него. Достатъчни са начални познания за имена, оператор за присвояване, изрази и функции, решение на уравнения (solve) и графика (plot). Изключително добре оформената help система на Maple дава възможност на потребителя постепенно да навлиза в богатите му възможности.

Графичният режим дава възможност за онагледяване на геометрични обекти: точки, вектори, криви, повърхнини, пресечници на повърхнини.

Библиотеките (пакетите) за работа със статистика, финанси, сигнали, симулация на сигнали и много други предоставят специализирани възможности за решаване на задачи в посочените области.

Като се прибави и възможността за връзка с някои алгоритмични езици за програмиране (Fortran, C, Visual C#(R), Java(TM), Visual Basic(R) и MATLAB(R)) и програмирането чрез средствата на MAPLE, може да се оцени богатата гама от възможности, които се откриват за използването на този софтуерен продукт за обучение, научни изследвания и описание на направени пресмятания и получени резултати.

По време на използването на MAPLE е достъпна помощ. Опитът показва, че е полезно да се създадат навици за самообучение на основата на достатъчно богат опит, съдържащ познания за математическите действия, графичните възможности, написването на код със средствата на MAPLE и използването на препратките към тематично свързани възможности. В това учебно помагало се акцентира на изучаване и използване на изрази, библиотеки, функции и процедури в рамките на библиотеките и други възможности.

Увод

За предпочитане е проучването на първа глава на ръководството да предшества четенето на останалите глави, особено за начинаещи в MAPLE и за читателите, които желаят бързо да придобият опит за самостоятелна работа. Полезно е да се изпълняват предложените примери в указания ред, да се четат коментарите към тях и да се пробват собствени примери.

Препоръчва се всяка сесия да започва с restart. Ако има основания да се счита, че са отстранени всички грешки, но въпреки това не се получават очакваните резултати, в много случаи е достатъчно сесията да се изпълни от предхождащ restart.

Използването на помощ по конкретен повод (например име на функция или библиотека) е начин да се разширят познанията и да се оформи собствен стил на работа.

Особено внимание заслужават възможностите, които софтуерният продукт предоставя, за проверка на получените резултати. Колкото по-задълбочена е теоретичната подготовка по математика, толкова по-разнообразни са начините за контрол на резултатите.

При решаване на конкретни задачи са използвани и неописани в Глава 1 възможности, т.е. до края на ръководството се появяват илюстрации на нови техники и знания за MAPLE. Наличието на кратки теоретични бележки, на неавтоматизирани решения и използването на помощ за непознатите приложени средства от MAPLE прави достъпно и разбираемо всяко предложено решение, без да е необходим строг ред на четене на ръководството, като се вземат предвид препратките.

Примерите са тествани на MAPLE 15.

Глава 1

Въведение в MAPLE

1.1 Основни възможности на MAPLE

В ръководството се използват имена на променливи (идентификатори), които са поредица от букви и цифри. Съдържанието на променлива може да бъде математическа формула, резултат от графичен режим на работа, процедура, логически оператор и др.
MAPLE е чувствителен към използване на малки и главни букви. Това е еднакво важно както при използване на стандартните възможности на продукта (имена на константи, функции, параметри на функции, библиотеки и др.), така и при дефиниране на имена на променливи, процедури и др. от потребителя. На командния ред на MAPLE, веднага след подсещащия символ ">"(prompt), се изписват команди, които след натискане на бутона ENTER се изпълняват или се появява съобщение за грешка, или се изпълняват и се появява предупреждение. Ако се налага пренасяне на команда на друг ред, се използва едновременно натискане на клавишите SHIFT и ENTER.

```
> # коментар  до края на реда
> restart: # препоръчва се всяка сесия да започва с restart
> ?help # помощ
> ?sum # помощ относно функцията с име sum
> a:=64; # операторът за присвояване е ":="
```

Всяка команда завършва с точка и запетая, ';', ако искаме да видим върху екрана резултатите, или с две точки, ':', ако предпочитаме да потиснем визуализацията им.

1.1.1 Константи и числови изрази

След изписване на реда

```
> Alpha; alpha; alfa; Pi; pi;I; i; E; e; exp(1);
```

и последващо изпълнение на $evalf$ на екрана се извежда стойността на константи, променливи или числов израз. С $Digits$ се зададава точността, с която това става. По премълчаване стойността на $Digits$ е 10. Да се сравнят резултатите от прилагане на $evalf$:

```
> Digits:=15; evalf(Pi); evalf(pi);evalf(exp(1));evalf(e);
```

Съдържанието на Pi е Лудолфовото число "пи", докато pi е име на идентификатор. Стойността на Неперовото число се получава като стойност на функцията e^x, която в MAPLE се задава с $exp(x)$, при x=1.
Аритметичните действия се означават: '+' събиране, '-' изваждане, '*'умножение, '/' деление, '**' или '^' степенуване.

```
> Digits:=20; Pi/2; evalf(%); arctan(1); evalf(%);
# evalf(%) дава числената стойност на последната
   променлива или израз
```

След пресмятане на числовите изрази (I е имагинерната единица):

```
> 12-7*2+22; 2*2*2; 2**3; 2^3; I^2; 4*I**3;
ln(exp(1)); ln(-2); sqrt(-4);
```

се получават следните резултати:
20, 8, 8, 8, -1, -4I, 1, ln(2)+Iπ, 2I.

1.1.2 Изрази и функции

Следващите примери показват различията при работа с изрази и функции.

Дефиниране на израз и функция, пресмятане на стойност:

```
> restart;
> izraz:= (2*x+1)*(x^2+x+1)^3; # дефиниране на израз в izraz
> f:=x->(2*x+1)*(x^2+x+1)^3; # дефиниране на функция във f
> with(plots):
```

```
> # чертане на графики на функция на една променлива
> # Трите графики се различават само по оцветяването.
> plot( (2*x+1)*(x^2+x+1)^3,x=-5..5,colour=red);
> plot(izraz,x=-5..5,color=green);
> plot(f(x),x=-5..5,colour=blue);
> # чрез израз се дефинира функция g
> g:=unapply(izraz, x);
> # чрез функция се дефинира израз
> izraz1:=f(x);
> # пресмятане на стойност на израз
> subs(x=0, (2*x+1)*(x^2+x+1)^3 );
> subs(x=0, izraz);
> # пресмятане на стойност на функция
> f(0); f(1);
```

Намиране на нули на функция на една променлива:

```
> restart; # намиране на всички нули на израз
> solve((2*x+1)*(x^2+x+1)^3=0);
> solve((2*x+1)*(x^2+x+1)^3);
> solve(izraz=0);solve(izraz);
> # намиране на всички нули на функция
> solve (f(x)=0);solve (f(x));
> # намиране на реални нули на израз
> fsolve((2*x+1)*(x^2+x+1)^3=0);
> fsolve((2*x+1)*(x^2+x+1)^3);
> fsolve(izraz=0);fsolve(izraz);
> # намиране на реални нули на функция
> fsolve (f(x)=0); fsolve (f(x));
> # решаване на уравнение относно различни променливи
> solve(a*x^2+b*x+c,x); solve(a*x^2+b*x+c,a);
  solve(a*x^2+b*x+c,b);
```

Граници на функции и развитие в степенен ред:

```
> restart:
> limit(sin(x)/x,x=0); # позната граница, имаща стойност 1
> # като граница на израз
```

```
> expr:= sin(x)/x; limit(expr,x=0);
> # като граница на функция
> f:=x-> sin(x)/x; limit(f(x),x=0);
> # три идентични развития в степенен ред в околност на нулата,
> # които потвърждават намерената с limit граница
> series(sin(x)/x,x=0,5); series(expr,x=0,5);
  series(f(x),x=0,5);
> # граница в плюс безкрайност
> limit((2*x^2-4*x+1)/(-3*x^2+2),x=infinity);
> # потвърждение на резултата чрез развитие в степенен ред
> series((2*x^2-4*x+1)/(-3*x^2+2),x=infinity,6);
```

Диференциране и интегриране на израз и функция:

```
> restart:
> expr:=exp(-x^2); f:=x-> exp(-x^2); # дефиниране на израз и функция
> # първа производна на израз
> expr1:=diff(expr,x);
> # директно пресмятане на втората производна
> expr2:=diff(expr,x,x);
> # първата производна на функция е израз
> g1:= diff(f(x),x); # може да се използва  и g1:= D(f)(x)
> f1:=x->-2*x*exp(-x^2);
> #  втора производна на функция
> g2:= diff(f(x),x$2);
> f2:= x->(4*x^2-2)*exp(-x^2);
> # първа производна на неявна функция
> yprim:=implicitdiff(-4*x+10*(x^2)/y^2=11,y,x);
> xprim:=implicitdiff(-4*x+10*(x^2)/y^2=11,x,y);
> # теорема за производна на права и обратна функция
> yprim*xprim;
> ## интегриране на израз
> # примитивна на втората производна
> int(expr2,x);
> # двукратно интегриране на втората производна
> int((int(expr2,x)),x);
> #  интегриране на първата производна
> int(expr1,x);
```

```
> int(2*a*x+b,x); int(2*a*x+b,a); int(2*a*x+b,b);
  int(2*a*x+b,x=0..1);
> ## интегриране на функция
> # примитивна на  първата производна
> F:=int(f1(x),x);
> restart:
 # плътност на стандартното нормално разпределение
> f:=x-> exp(-x^2/2)/(sqrt(2*Pi));
> with(plots):
> plot(f(x),x=-infinity..infinity); # камбанка на Гаус
> # едно от свойствата на понятието плътност на разпределение:
> # площта на фигурата между абсцисната ос и графиката на
> # плътността на прозволно разпределение е равна на 1
> int(f(x),x=-infinity..infinity); # 1
```

1.1.3 Многочлени

```
> restart:
> pol1:=(2*x-1)*(x^2+x+1)^2; # в pol1 има многочлен от пета степен
> q:=expand(pol1); # многочлен като сума на едночлени (мономи)
> sort(q); # приведение и подреждане по степените на  едночлените
> pol2:=(x+1)^7-x^7-1; # многочлен от шеста степен
> factor(pol2); # представяне на многочлен като произведение
> rf:=(x-3)/pol1; # рационална функция
> # представяне на рационална функция като сума на
> # елементарни дроби от първи и втори вид
> convert(rf,parfrac,x);
> expand(cos(6*x)); # развитие по степените на cos(x)
> # представяне  чрез cos(kx) и sin(kx), k=1,2,...6
> combine(sin(x)^6,trig);combine(cos(x)^6,trig);
```

1.1.4 Графики на функции

За други графични възможности освен *plot* е необходим достъп до библиотека *plots*. Библиотеките се зареждат в оперативната памет чрез *with*.

```
> restart: with(plots): #
Ако не се потисне визуализацията на съобщения, върху екрана се
```

появява предупреждение за предефиниране на означения в рамките на библиотека plots.

```
> # графика на явно зададена функция на 1 променлива
> plot(sinh(x),x=-10..10);
> # графики на две явно зададени функции на 1 променлива чрез изрази
> plot([sinh(x),cosh(x)],x=-10..10,color=[red,black]);
> # графика на явно зададена функция на 1 променлива чрез функция
> f:=x->x^2; plot(f(x),x=-1..1,style=point,color=black);
> #  графика на неявно зададена функция на 1 променлива
> F:=x^2+y^2-1; implicitplot(F=0, x=-2..2,y=-2..2);
> # дефиниране на функция-индикатор чрез логически израз
> f1:=x->piecewise(x < 0, 0, 1);
> # графика на частично непрекъсната функция
> plot (f1,-1..1,discont=true);
> # дефиниране на частично непрекъсната функция
> f2:=x->piecewise(x<=2,x^2,x<4,3-x,4);
> # графика на частично непрекъсната функция
> plot (f2,-1..6,discont=true);
> # графика  на явно зададена функция на 2 променливи
> plot3d(exp(-x^2-y^2),x=-2..2,y=-2..2);
> # графика  на неявно зададена функция на 2 променливи
> implicitplot3d(x^2+4*y^2+9*z^2=1,x=-2..2,y=-2..2,z=-2..2,
  style=point);
> # сравнете резултата със следващата графика
> implicitplot3d(x^2+4*y^2+9*z^2=1,x=-1..1,y=-1/2..1/2,z=-1/3..1/3);
```

1.1.5 Вектори и матрици

Необходима е библиотеката *linalg*

```
> restart; with(linalg): # зареждане на библиотека linalg
>  # в идентификатора M се създава матрица с 3 реда и 2 стълба
> M:=matrix([[1,5],[-3,8],[4,0]]);
>  # в идентификатора P се създава матрица с 2 реда и 4 стълба
> P:=matrix([[1,1,1,1],[1,1,1,1]]);
> multiply(M,P); # умножаване на две матрици
> transpose(M); # смяна на редове и стълбове в матрица, транспониране
> A:=matrix([[1,1,1],[3,1,0],[1,-2,-1]]); # квадратна матрица
> det(A); # пресмятане на детерминанта на квадратна матрица
```

```
> V:=matrix([[1/5],[3/5],[0]]); # във  V е създаден вектор-стълб
> linsolve(A,V); # решаване на матрично уравнение Ax= V
> # в идентификатора B се създадава матрица с 3 реда и 2 стълба
> B:=matrix([[1/5,1,-1],[3/5,1,-1],[0,0,0]]);
> X:=linsolve(A,B); # решаване на матрично уравнение Ax= B
> multiply(A,X);
```

Елементите на една матрица могат да са изрази, зависещи от параметри.

```
> C:=matrix([[a, b^2+c],[a^2+b,c-a]]); C[1,2]; C[1,2]:=10; print(C);
```

1.1.6 Изрази от тип редица, списък, множество и уравнение

```
> restart;
> sqn1:= 15,4,3,15,6; # в идентификатора sqn1 е записана редица
> sqn1[4]; # достъп до четвъртия елемент от редицата
> lst:=[]; # в идентификатора lst  е запазен празен списък
> lst1:=[15,4,3,15,6]; # непразен списък
> # към старото съдържание на списъка се добавят 5 елемента
> lst2:=[op(lst),sqn1]; # lst1 и lst2 имат еднакво съдържание
> lst2[4]; # достъп до четвъртия елемент от списъка
> sqn2:=[4,4,3]; lst3:= [sqn1,sqn2]; # конкатениране (залепване)
> set1:= {sqn1,sqn2}; # в set1 е записано множество
> nops(lst1); # брой на елементите в списъка
> op(2,lst1); # вторият елемент от списъка
> op(2..4,lst1); # от втори до четвърти елемент на списъка
> op(lst1); # всички елементи на списъка
> op(-1,lst1); # последният елемент на списъка
> op(0,lst1); # информацията в идентификатора lst1 е тип list
> u:=f(x,y,z);
> op(u); # връща редицата от операндите
> eq:= diff(y(x),x,x)+2*diff(y(x),x)+y(x)=x*sin(x);
> lhs(eq); # дава лявата част на уравнението
> rhs(eq); # дава дясната част на уравнението
```

1.2 Примери

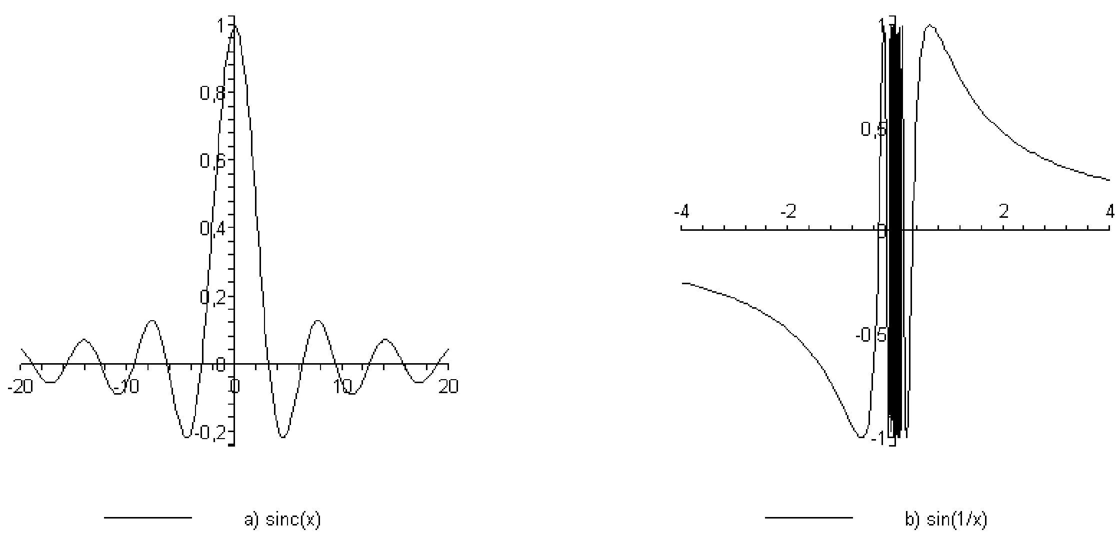
Задача 1. Да се начертаят графиките на функциите

$$sinc(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

и $\sin \dfrac{1}{x}$ в симетрични относно нулата интервали (в частност върху цялата права).

Следният код използва процедури за дефиниране на двете функции. Графиките са показани на ФИГУРА 1.

```
> restart;
> sinc:=proc(x)
       if x<>0 then  sin(x)/x  else  1 end if;
  end proc;
> f:=x->sinc(x);
  plot(f,-20..20,legend=‘a) sinc(x)‘);
> g:=x->piecewise(x<>0,sin(1/x));
   plot(g,-4..4,discont=true,legend=‘b) sin(1/x)‘);
```



ФИГУРА 1. Графики на функции

Задача 2. (Математическо махало). Да се намерят законът на движение и периодът T на математическо махало при малки ъглови отклонения от равновесното положение, ако дължината на махалото е l.

Моделиране

Силата на тежестта $\mathbf{P}$, приложена в точката M, се разлага на сума от две компоненти: по дължината на нишката (радиална) $\mathbf{N}$ и по тангентата на траекторията на движението (тангенциална) $\mathbf{f}$. $\mathbf{N}$ уравновесява съпротивлението на нишката. Следователно резултантната сила е $\mathbf{f}$. Когато ъгълът φ е положителен, тангенциалната компонента е отрицателна, следователно $f = -mg\sin\varphi$, където m е масата на материалната точка в края на нишката и g е земното ускорение. Прилага се вторият закон на Нютон и се получава следната задача за ъгъла на отклонението $\varphi(t)$ като функция на времето t:

$$\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{dt^2} + \frac{g}{l}\sin\varphi = 0 \tag{1.2.1}$$

$$\varphi(0) = \varphi_0,\ \varphi'(0) = 0. \tag{1.2.2}$$

При малки ъглови отклонения се прави линейно приближение на $\sin\varphi$, което води до следния линеен модел:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{g}{l}\varphi = 0 \tag{1.2.3}$$

$$\varphi(0) = \varphi_0,\ \varphi'(0) = 0. \tag{1.2.4}$$

Аналитично решение на задачата (1.2.3), (1.2.4)

$$\varphi(t) = \varphi_0 \cos\sqrt{\frac{g}{l}}\, t$$

Решението на (1.2.3), (1.2.4) е периодична функция с амплитуда φ_0 и период $2k\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$.

Решение на (1.2.3) с помощта на MAPLE

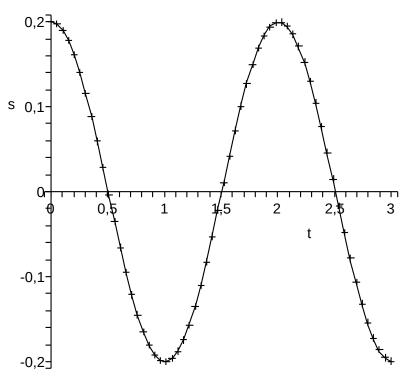
```
> assume(g>0,l>0, phi0>0); #g:=9.8;
> eq:=diff(s(t),t,t)+g/l*s(t)=0:
> dsolve(eq,s(t)):
```

Общото решение на (1.2.1) не може да се изрази чрез т.нар. елементарни функции. Да сравним двата математически модела- линейния и нелинейния, като използваме числените решения, получени с помощта на MAPLE, при начални ъглови отклонения, равни на 0,2 и 1. Графично представените резултати потвърждават валидността на линейния модел при достатъчно малки начални отклонения.

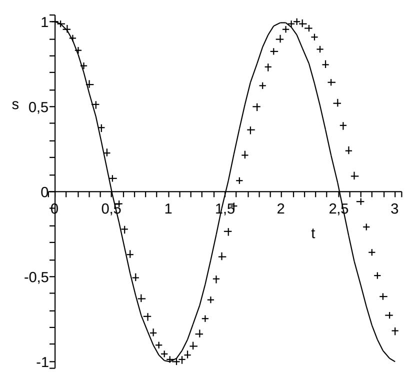
Сравняване на двата математически модела с помощта на MAPLE

```
> g:=9.8; l:=1; phi0:=.2;
> eq0:=diff(s(t),t,t)+(g /l)*sin(s(t))=0;
 eq1:=diff(s(t),t,t)+(g/l)*s(t)=0;
> sn1:=dsolve({eq1,s(0)=phi0,D(s)(0)=0},s(t),numeric);
 fig1:=odeplot(sn1,[t,s(t)],0..3,numpoints=60,
 style=line, linestyle=1,color=black):
> sn0:=dsolve({eq0,s(0)=phi0,D(s)(0)=0},s(t),numeric);
 fig0:=odeplot(sn0,[t,s(t)],0..3,numpoints=60,
 style=point, symbol=cross, color=black):
> with(plots): display(fig0,fig1);
```

Ако началното отклонение е относително голямо, то с течение на времето разликите между решенията на двата модела нарастват. С кръстчета са маркирани точките от численото решение на (1.2.1), (1.2.2) (виж ФИГУРА 2).



(а) Начално ъглово отклонение 0,2



(б) Начално ъглово отклонение 1

ФИГУРА 2. Сравняване на двата математически модела от Пример 2

Глава 2

Функции на много променливи

2.1 Дефиниционно множество, граници, производни.

Дефиниция 2.1.1. Нека множеството $D_f \subset \mathbb{R}^n$. Казваме, че е дадена *функцията* $f : D_f \to \mathbb{R}$, т.е. $z = f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, ако на всяко $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ (т.е. наредена $n-$орка от реални числа) от множеството D_f е съпоставено по определено правило реалното число $z \in \mathbb{R}$. Множеството D_f се нарича *дефиниционно множество* на функцията, а множеството $M_f \subset \mathbb{R}$, $M_f = \{z | \; \exists x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in D_f, z = f(x)\}$, е *множеството от стойности* на функцията.

Дефиниция 2.1.2. Казваме,че уравнението $F(z, x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$ определя z като *неявна функция* на $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и пишем

$$F(z, x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \; z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

В някои случаи определенията, свойствата и теоремите ще се разглеждат за функция на две променливи.

Дефиниция 2.1.3. Казваме, че функцията $z = f(x, y)$ има *граница* L в точката (x_0, y_0), ако за всяка сходяща към (x_0, y_0) редица от точки

$$(x_1, y_1), \; (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n), \ldots,$$

които принадлежат на D_f, съответната редица от стойности на функцията

$$f(x_1, y_1), \; f(x_2, y_2), \ldots, f(x_n, y_n), \ldots,$$

е сходяща с граница L.

В сила са теореми за аритметични действия с функции на много променливи, притежаващи граници, аналогични на теоремите за функции на една променлива.

Дефиниция 2.1.4. Ако в Дефиниция 2.1.2 точката $M_0(x_0, y_0)\epsilon D_f$ и е изпълнено $L = f(x_0, y_0)$, то казваме, че функккцията $z = f(x, y)$ е *непрекъсната* в точката $M_0(x_0, y_0)$.

Дефиниция 2.1.5. Нека точката $M_0(x_0, y_0)$ принадлежи на D_f. Ако съществува границата

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x},$$

то казваме, че функцията притежава *частна производна* спрямо x в точката (x_0, y_0) и пишем

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}.$$

Използват се следните означения за частни производни от първи и повисок ред:

$$f'_x \equiv z'_x \equiv \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}, \qquad f'_y \equiv z'_y \equiv \frac{\partial f(x,y)}{\partial y},$$

$$f''_{xx} \equiv z''_{xx} \equiv \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}, \qquad f''_{xy} \equiv z''_{xy} \equiv \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y},$$

$$f''_{yx} \equiv z''_{yx} \equiv \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x}, \qquad f''_{yy} \equiv z''_{yy} \equiv \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}.$$

Нека

$$y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

и от своя страна

$$\begin{gathered} x_1 = g_1(t_1, t_2, \ldots, t_m), \\ x_2 = g_2(t_1, t_2, \ldots, t_m), \\ \cdots, \\ x_n = g_n(t_1, t_2, \ldots, t_m), \end{gathered}$$

т. е. f е функция на новите променливи $t_1, t_2, \ldots, t_m$. Предполага се, че всички споменати функции имат непрекъснати частни производни. Тогава са в сила следните формули за диференциране на съставна функция:

$$\frac{\partial f}{\partial t_k} = \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial g_1}{\partial t_k} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\partial g_2}{\partial t_k} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\frac{\partial g_n}{\partial t_k}, \ k = 1, 2, \ldots, m. \qquad (2.1.1)$$

Дефиниция 2.1.6. Казваме, че функцията $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ е *хомогенна* от ред n, ако за всяко $t > 0$ е изпълнено $f(tx_1, tx_2, \ldots, tx_n) = t^n f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ за всяка точка $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ от множеството $D_f \subset \mathbb{R}^n$.

За всяка хомогенна функция от ред n е в сила тъждеството на Ойлер

$$x_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial z}{\partial x_2} + \cdots + x_n \frac{\partial z}{\partial x_n} = nz. \tag{2.1.2}$$

Задача 3. Да се определи и начертае дефиниционното множество на функцията

$$z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}\,.$$

Решение: Функцията е дефинирана, ако подкоренната величина е неотрицателна, т.е. $1 - x^2 - y^2 \geqslant 0$ или $x^2 + y^2 \leq 1$. Дефиниционното множество е затворен централен кръг (с център координатното начало) с радиус 1, а границата му е централна единична окръжност.

```
> restart; with(plots):
> # графика на контура чрез графиките на две
явно зададени функции
> plot({sqrt(1-x^2),-sqrt(1-x^2)},x=-1..1);
> # графика на контура чрез графиката на
 неявно зададена функция
> implicitplot(1-x^2-y^2,x=-1..1,y=-1..1);
> # графика на дефиниционното множество
> with(plottools);
> display(disk([0,0],1,color=green));
```

Задача 4. Да се определи дефиниционното множество на функцията

$$z = \sqrt{\frac{x^2 + y^2 - x}{2x - x^2 - y^2}}$$

и се начертае.

Решение: Множеството от решения на системата неравенства

$$\left| \begin{array}{r} x^2 + y^2 - x \geqq 0 \\ 2x - x^2 - y^2 > 0 \end{array} \right.$$

е сечението на външността на окръжността $(x - 0,5)^2 + y^2 = 0,25$ и вътрешността на окръжността $(x - 1)^2 + y^2 = 1$ без точките върху втората окръжност.

```
> restart; with(plots): with(plottools):
> # графика на контура
> c1:= circle([1,0],1,color=blue,style=point):
> c2:= circle([1/2,0],1/2,color=red,style=line):
> display(c1,c2);
> #графика на дефиниционното множество
> d1:=disk([1,0],1,color=red):
  d2:=disk([1/2,0],1/2,color=white):
> c:=circle([1,0],1,color=white,style=point):
> display({d1,d2,c});
```

Задача 5. Да се намери и начертае дефиниционното множество на функцията

$$z = \sqrt{\frac{2x - y - 2}{x + y - 1}}.$$

Решение: Множеството от решения на неравенствата

$$\left| \begin{array}{r} 2x - y - 2 \geqq 0 \\ x + y - 1 > 0 \end{array} \right.$$

и

$$\left| \begin{array}{r} 2x - y - 2 \leq 0 \\ x + y - 1 < 0 \end{array} \right.$$

може да се намери и начертае с MAPLE

```
> restart:
> # намиране на решенията на двете системи линейни неравенства
> solve({2*x-y-2 >= 0,x+y-1>0},{x,y});
> solve({2*x-y-2 <= 0,x+y-1<0},{x,y});
> # начертаване на дефиниционното множество
> with(plots):
> inequal({2*x-y-2 >= 0,x+y-1>0},x=-3..3,y=-3..3,
optionsexcluded=[color=blue, thickness=2]);
> inequal({2*x-y-2 <= 0,x+y-1<0},x=-3..3,y=-3..3,
optionsexcluded=[color=blue, thickness=2]);
```

Задача 6. Да се определи и начертае дефиниционното множество на функцията

$$z = \arcsin(x + y + z).$$

Решение: Дефиниционното множество на функцията arcsin е затвореният интервал $[-1;1]$, следователно решенията на веригата от неравенства

$$-1 \leq x + y + z \leq 1 \tag{2.1.3}$$

представлява исканото множество. Геометрично става въпрос за точките между две равнини в тримерното пространство.

```
> restart;with(plots):
> # решения на веригата от неравенства
> solve({x+y+z>=-1,x+y+z<=1},{x,y});
> # граница на дефиниционното множество
> implicitplot3d({x+y+z=1,x+y+z=-1},x=-2..2,y=-2..2,z=-2..2);
```

Задача 7. Да се определи и начертае дефиниционното множество на функцията

$$u = \ln(2x^2 + 6y^2 + z^2 - 6)\,.$$

Решение: Дефиниционното множество на функцията ln е отвореният интервал $(0, +\infty)$, следователно множеството от решения на неравенството

$$2x^2 + 6y^2 + z^2 - 6 > 0$$

е исканото дефиниционно множество. Геометрично то се описва от точките, не принадлежащи както на вътрешността на елипсоида, така и на самия елипсоид с дължини на полуосите $\sqrt{3}$, 1, $\sqrt{6}$.

```
> restart;with(plots):
> # граница на дефиниционното множество
> implicitplot3d(2*x^2+6*y^2+z^2=6,x=-2..2,y=-1..1,z=-3..3);
```

Задача 8. Дадена е функцията $f(x,y) = \dfrac{x^2y^2}{x^2y^2 + (x^2 - y^2)^2}$. Да се покаже, че съществуват последователните граници

$$\lim_{y\to 0}(\lim_{x\to 0} f(x,y)), \quad \lim_{x\to 0}(\lim_{y\to 0} f(x,y))\,,$$

но не съществува границата

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)\,.$$

Решение:

```
> restart;
> # последователни граници
> f:=x^2*y^2/(x^2*y^2+(x^2-y^2)^2);
> limit(limit(f,{x=0}),{y=0});
> limit(limit(f,{y=0}),{x=0});
> limit(f,{x=0,y=0});
> ## границата зависи от пътя, по който се достига до (0,0)
> fl:=simplify(subs(y=k*x,f));
```

Задача 9. Да се намери

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{xy+1}-1}\,.$$

Решение:

```
> restart;
> B:= mtaylor(sqrt(x*y+1)-1,{x=0,y=0},8);
> limit(x*y/B,{x=0,y=0});
```

Границата е равна на 2.

Задача 10. Да се покаже,че

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{1}{2}\,.$$

Решение:

```
> restart;
> A:=mtaylor(1-cos(x^2+y^2),{x=0,y=0},10);
> limit(A/(x^2+y^2)^2,{x=0,y=0});
```

Задача 11. Да се покаже,че

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{xy}{\sin(xy)} = 1\,.$$

Решение:

```
> restart;
> B :=mtaylor(sin(x*y),{x=0,y=1});
> limit(x*y/B,{x=0,y=1});
```

Задача 12. Да се провери равенството

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = 1\,.$$

Решение:

```
> restart;
> A :=mtaylor(sin(x^2+y^2),{x=0,y=0});
> limit(A/(x^2+y^2),{x=0,y=0});
```

Задача 13. Дадена е функцията $f(x,y) = \dfrac{x+e^y}{\sqrt{x^2+y^2}}$. Да се провери

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} f(x,y) = f(1,0) = 2\,.$$

Решение:

```
> restart;
> A:=mtaylor(x+exp(y),{x=1,y=0});
> B:=mtaylor(sqrt(x^2+y^2),{x=1,y=0});
> limit(A/B,{x=1,y=0});
> subs(x=1,y=0,(x+exp(y))/sqrt(x^2+y^2));
```

Задача 14. Да се покаже, че функцията $z = arctg\dfrac{x+y}{x-y}$ удовлетворява частното диференциално уравнение

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x-y}{x^2+y^2}\,.$$

Решение: Прилага се формулата за производна на съставна функция (2.1.1), за да се пресметнат първите частни производни:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1+\left(\dfrac{x+y}{x-y}\right)^2} \frac{\partial \dfrac{x+y}{x-y}}{\partial x} = \frac{1}{1+\left(\dfrac{x+y}{x-y}\right)^2} \frac{x-y-x-y}{(x-y)^2}\,,$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-2y}{(x-y)^2 + (x+y)^2} = -\frac{y}{x^2+y^2}\,,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{1+\left(\dfrac{x+y}{x-y}\right)^2}\frac{\partial\dfrac{x+y}{x-y}}{\partial y} = \frac{1}{1+\left(\dfrac{x+y}{x-y}\right)^2}\frac{x-y+x+y}{(x-y)^2}\,,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2x}{(x-y)^2 + (x+y)^2} = \frac{x}{x^2+y^2}\,.$$

Сумата на двете частни производни е равна на дясната страна на уравнението.

```
> restart;
> z:=arctan((x+y)/(x-y));
> eq:=diff(z,x)+diff(z,y)=(x-y)/(x^2+y^2);
> L:=simplify(lhs(eq));
> R:=simplify(rhs(eq));
> simplify(L-R);
```

Задача 15. Да се провери тъждеството на Ойлер (2.1.2) за функцията

$$z = \frac{1}{(x^2+y^2)^2}\,.$$

Решение:

```
> restart;
> z:=1/(x^2+y^2)^2;
> simplify(subs(x=t*x,y=t*y,z));
> n:=-4;
> eq:=x*diff(z,x)+y*diff(z,y)=n*z;
> L:=simplify(lhs(eq));
> R:=simplify(rhs(eq));
> simplify(L-R);
```

Задача 16. Да се провери тъждеството на Ойлер (2.1.2) за функцията

$$z = \sqrt[3]{x^2+xy+y^2}\,.$$

Решение:

```
> restart;
> z:=(x^2+x*y+y^2)^(1/3);
> subs(x=t*x,y=t*y,z);
> n:=2/3;
> eq:=x*diff(z,x)+y*diff(z,y)=n*z;
> L:=simplify(lhs(eq));
> R:=simplify(rhs(eq));
> simplify(L-R);
```

Задача 17. Да се провери тъждеството на Ойлер (2.1.2) за функцията

$$u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\, \ln \frac{y}{x}\,.$$

Решение:

```
> restart;
> u:=sqrt(x^2+y^2+z^2)*ln(y/x);
> subs(x=t*x,y=t*y,z=t*z,u);
> n:=1;
> eq:=x*diff(u,x)+y*diff(u,y)+z*diff(u,z)=n*u;
> L:=simplify(lhs(eq));
> R:=simplify(rhs(eq));
> simplify(L-R);
```

2.2 Локален екстремум на функция на две променливи

Дефиниция 2.2.1. Казваме, че функцията $z = f(x, y)$ има *локален максимум (минимум)* в точката (x_0, y_0), ако съществува кръгова околност $V_{(\delta)}(x_0, y_0)$ на точката (x_0, y_0) с радиус δ, такава че за всяка точка (x, y) от тази околност е изпълнено $f(x, y) \le f(x_0, y_0) \qquad (f(x, y) \ge f(x_0, y_0)\ )$.

Дефиниция 2.2.2. *Точки на възможен локален екстремум* за функцията $z = f(x, y)$ се наричат точките от D_f, в които първите частни производни съществуват и се анулират (*стационарните точки*), т.е. решенията на системата

$$\left|\begin{array}{l} \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 0, \end{array}\right.$$

и тези, в които частните производни не съществуват.

С $\Delta(x, y)$ означаваме следната детерминанта от вторите частни производни:

$$\Delta(x,y) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x} & \dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} \end{vmatrix}.$$

Ако $\Delta(x_0, y_0)$ има положителна стойност в стационарната точка (x_0, y_0), то в тази стационарна точка функцията $z = f(x, y)$ има локален екстремум, като при $\dfrac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2} < 0$ той е максимум, а при $\dfrac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2} > 0$ е минимум. Ако $\Delta(x_0, y_0) = 0$, въпросът със съществуването на локален екстремум остава нерешен. Ако $\Delta(x_0, y_0) < 0$, то в стационарната точка функцията f няма локален екстремум.

Информация за градиент има в Глава 5, виж Дефиниция 5.1.5.

Задача 18. Да се изследва за локален екстремум следната реална функция на две реални променливи : $z = (y - x)^2(1 - x^2 - y^2)$. Да се потвърдят получените резултати с *gradplot*.

Решение: В идентификатора z се записва израз, съответстващ на функцията

```
> restart; with(plots):
> z:=(y-x)^2*(1-x^2-y^2);
```

В zx и zy са пресметнати частните производни на функцията $z(x, y)$ по x и по y

```
> zx:=factor(diff(z,x)); zy:=factor(diff(z,y));
```

Решава се системата уравнения за стационарните точки

$$\left| \begin{array}{l} -2(x-y)(2x^2 - xy + y^2 - 1) = 0, \\ 2(x-y)(x^2 - xy + 2y^2 - 1) = 0 \end{array} \right.$$

Очевидно, точките от ъглополовящата на първи и втори квадрант са стационарни точки. Чрез *solve*:

```
> solve({x-y,x^2-x*y+2*y^2-1},{x,y});
> solve({x-y,2*x^2-x*y+y^2-1},{x,y});
> solve({x^2-x*y+2*y^2-1,2*x^2-x*y+y^2-1},{x,y});
```

се намират стационарните точки.

Точките $M\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$, $N\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ и тези от ъглополовящата на първи и трети квадрант $y=x$ са стационарни, като точките $P\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ и $Q\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, въпреки че лежат на правата $y=x$, ще се изследват отделно.

Пресмятат се вторите частни производни и $\Delta(x,y)$

```
> zxx:=factor(diff(z,x$2)); zxy:=factor(diff(z,x,y));
> zyx:=factor(diff(z,y,x)); zyy:=factor(diff(z,y$2));
> delta:=factor(zxx*zyy-zxy^2);
```

и се получават следните резултати:

$$\Delta(x,y)=\begin{vmatrix} 2-12x^2-4y^2+12xy & -2+6x^2+6y^2-8xy \\ -2+6x^2+6y^2-8xy & 2-4x^2-12y^2+12xy \end{vmatrix},$$

$$\Delta(x,y)=4(-2+3x^2-18xy+3y^2)(x-y)^2.$$

В точка M стойността на $\Delta(x,y)$ е 16, следователно в тази точка функцията има локален екстремум и тъй като $\frac{\partial^2 f(M)}{\partial x^2}=-5<0$, този екстремум е максимум, равен на $z_{max}=z\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$. Наистина

```
> subs(x=1/2,y=-1/2,delta);
> subs(x=1/2,y=-1/2,zxx);
> subs(x=1/2,y=-1/2,z);
```

Резултатите за точка N са идентични, т.е. в тази точка също има локален максимум със същата стойност:

```
> subs(x=-1/2,y=1/2,delta);
> subs(x=-1/2,y=1/2,zxx);
> subs(x=-1/2,y=1/2,z);
```

Върху правата $y=x$ е изпълнено $\Delta(x,y)=0$, което се пресмята чрез

```
> subs(x=y,delta);
```

Следователно върху тази права са необходими допълнителни изследвания. Нека $L(\xi,\xi)$ е точка от правата $y=x$. Образува се нарастването

$$\Delta z(L) = z(x,y) - z(\xi,\xi) = (y-x)^2(1-x^2-y^2)$$

и се разглежда знакът на тази разлика в точките от правата $y=x$.

Нека $L(\xi,\xi)$ е точка от правата $y=x$, за която $\xi^2+\xi^2<1$, т.е. точката принадлежи на вътрешността на централната единична окръжност. В този случай може да се намери достатъчно малка околност на точката $L(\xi,\xi)$, която изцяло принадлежи на вътрешността на централната единична окръжност и там $\Delta z(L) \geq 0$, следователно в точката $L(\xi,\xi)$ функцията има нестрог локален минимум, $z_{min} = z(\xi,\xi) = 0$.

Нека $L(\xi,\xi)$ е точка от правата $y=x$, за която $\xi^2+\xi^2>1$, т.е. точката е извън затворения централен единичен кръг. В този случай може да се намери достатъчно малка околност на точката $L(\xi,\xi)$, която изцяло принадлежи на външността на централния единичен кръг и там $\Delta z(L) \leq 0$, следователно в точката $L(\xi,\xi)$ функцията има нестрог локален максимум, равен на нула, $z_{min} = z(\xi,\xi) = 0$.

Точките $P\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ и $Q\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ лежат освен на правата $y=x$ и на централната единична окръжност, от което следва, че във всяка тяхна околност $\Delta z(L)$ си мени знака, т.е. тези две точки са седловинни.

Използваме информацията от *gradplot*, която потвърждава двата строги локални максимума и показва нестрог екстремум върху правата $y=x$ със стойност нула.

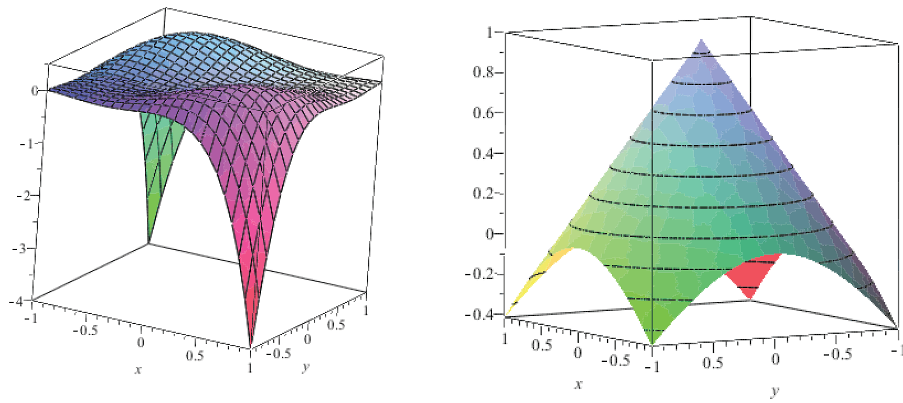
```
> gradplot(z,x=-0.8..0.8,y=-0.8..0.8);
```

Тримерната графика (ФИГУРА 3, (а)) дава представа за поведението на функцията в подмножество от дефиниционното ѝ множество, съдържащо точките M и N и част от правата $y=x$.

```
> plot3d(z,x=-1..1,y=-1..1);
```

Задача 19. Да се изследва за локален екстремум следната реална функция на две реални променливи : $z = 1-\sqrt{x^2+y^2}$, като се използват *gradplot* и *plot3d* с опционен аргумент $style = contour$.

Решение:



(а)$z = (y - x)^2(1 - x^2 - y^2)$ (б) $z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$

ФИГУРА 3. Явно зададени функции

```
> restart; with(plots):
> z:=1-sqrt(x^2+y^2);
> zx:=factor(diff(z,x)); zy:=factor(diff(z,y));
> solve({zx,zy},{x,y});
> gradplot(z,x=-1..1,y=-1..1);
> plot3d(z,x=-1..1,y=-1..1, style=contour);
```

В координатното начало първите частни производни на функцията не съществуват и там функцията е дефинирана, следователно това е точка на възможен локален екстремум.

Разглежда се разликата $z(\Delta x, \Delta y) - z(0,0) = -\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$, която е отрицателна, следователно функцията има строг локален максимум, равен на 1, $z_{max} = z(0,0) = 1$. Това се потвърждава от *plot3d* (ФИГУРА 3, (б)) и *gradplot*.

Задача 20. Да се изследва за екстремум следната функция:

$$u = x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 6z.$$

Решение:

```
> restart; with(plots):
> u:=x^2+y^2+z^2+2*x+4*y-6*z;
> ux:=factor(diff(u,x)); uy:=factor(diff(u,y));
  uz:=factor(diff(u,z));
> solve({ux,uy,uz},{x,y,z});
```

Функцията има една стационарна точка $M(-1,-2,3)$. Трябва да се изследва знакът на втория диференциал в тази точка. Пресмятат се:

$$\Delta_1 = u''_{xx}(M) = 2 > 0,$$

$$\Delta_2(M) = \begin{vmatrix} u''_{xx}(M) & u''_{xy}(M) \\ u''_{yx}(M) & u''_{yy}(M) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0,$$

$$\Delta_3(M) = \begin{vmatrix} u''_{xx}(M) & u''_{xy}(M) & u''_{xz}(M) \\ u''_{yx}(M) & u''_{yy}(M) & u''_{yz}(M) \\ u''_{zx}(M) & u''_{zy}(M) & u''_{zz}(M) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 8 > 0.$$

```
> uxx:=diff(u,x$2);uxy:=diff(u,x,y);uxz:=diff(u,x,z);
> uyx:=diff(u,y,x);uyy:=diff(u,y$2);uyz:=diff(u,y,z);
> uzx:=diff(u,z,x);uzy:=diff(u,z,y);uzz:=diff(u,z$2);
> delta1:=subs(x=-1,y=-2,z=3,uxx);
> with(linalg);
> D2:=matrix([[uxx,uxy],[uyx,uyy]]);
> delta2:=det(D2);
> subs(x=-1,y=-2,z=3,delta2);
> D3:=matrix
([[uxx,uxy,uxz],[uyx,uyy,uyz],[uzx,uzy,uzz]]);
> delta3:=det(D3);
> subs(x=-1,y=-2,z=3,delta3);
> zmin:=subs(x=-1,y=-2,z=3,u);
```

Съгласно критерия на Силвестър вторият диференциал на функцията е положително определена квадратична форма в точка $M(-1,-2,3)$ и следователно функцията има локален минимум в тази точка, $u_{min} = u(-1,-2,3) = u(M) = -14$.

```
> with(plots);
> f:=gradplot3d(x^2+y^2+z^2+2*x+4*y-6*z,
x=-2..0,y=-3..-1,z=2..4,grid=[5,5,5]):
> g:=pointplot3d([-1,-2,3],style=point,color=black):
> display(f,g);
```

Задача 21. Да се изследва за екстремум функцията:

$$u = \sin x + \sin y + \sin z - \sin(x+y+z),$$

$$0 < x < \pi,\ 0 < y < \pi,\ 0 < z < \pi.$$

Решение:

```
> restart; with(plots):
> u:=sin(x)+sin(y)+sin(z)-sin(x+y+z);
> ux:=factor(diff(u,x)); uy:=factor(diff(u,y));
uz:=factor(diff(u,z));
> solve({ux,uy,uz},{x,y,z});
```

Функцията има една стационарна точка $M\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$. Трябва да се изследва знакът на втория диференциал в тази точка. Пресмятат се:

$$\Delta_1(M) = u''_{xx}(M) = -2 < 0,$$

$$\Delta_2(M) = \begin{vmatrix} u''_{xx}(M) & u''_{xy}(M) \\ u''_{yx}(M) & u''_{yy}(M) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 3 > 0,$$

$$\Delta_3(M) = \begin{vmatrix} u''_{xx}(M) & u''_{xy}(M) & u''_{xz}(M) \\ u''_{yx}(M) & u''_{yy}(M) & u''_{yz}(M) \\ u''_{zx}(M) & u''_{zy}(M) & u''_{zz}(M) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{vmatrix} = -4 < 0.$$

```
> uxx:=diff(u,x$2);uxy:=diff(u,x,y);uxz:=diff(u,x,z);
> uyx:=diff(u,y,x);uyy:=diff(u,y$2);uyz:=diff(u,y,z);
> uzx:=diff(u,z,x);uzy:=diff(u,z,y);uzz:=diff(u,z$2);
> delta1:=subs(x=Pi/2,y=Pi/2,z=Pi/2,uxx);
> delta2:=linalg[det]([[uxx,uxy],[uyx,uyy]]);
> subs(x=Pi/2,y=Pi/2,z=Pi/2,delta2);
> delta3:=linalg[det]([[uxx,uxy,uxz],[uyx,uyy,uyz],[uzx,uzy,uzz]]);
> subs(x=Pi/2,y=Pi/2,z=Pi/2,delta3);
> zmin:=subs(x=Pi/2,y=Pi/2,z=Pi/2,u);simplify(zmin);
```

Съгласно критерия на Силвестър вторият диференциал на функцията е отрицателно определена квадратична форма в точка $M\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ и следователно функцията има локален максимум в тази точка, $u_{max} = u(M) = u\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right) = 4$.

```
> with(plots);
> f:=gradplot3d(sin(x)+sin(y)+sin(z)-sin(x+y+z),
x=0..Pi,y=0..Pi,z=0..Pi,grid=[5,5,5]):
> g:=pointplot3d([Pi/2,Pi/2,Pi/2],style=point,color=black):
> display(f,g);
```

2.3 Локален екстремум на неявно зададена функция на една променлива

Дефиниция 2.3.1. Казваме, че уравнението $f(x, y) = 0$ определя y като *неявна функция* на x и пишем

$$f(x, y) = 0,\ y = y(x).$$

В случай на неявна функция на една променлива стационарните точки на $y(x)$ са решенията на системата

$$\left|\begin{array}{l} \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 0, \\ f(x,y) = 0 \\ \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y} \neq 0 \end{array}\right.$$

и точките от D_f, в които първите частни производни не са дефинирани. Ако е изпълнено $-\dfrac{f''_{xx}}{f'_y} < 0$ в стационарна точка, то неявно зададената функция на една променлива притежава локален максимум или локален минимум при $-\dfrac{f''_{xx}}{f'_y} > 0$.

Задача 22. Дадено е уравнението

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1,$$

което дефинира y като неявна функция на x. Да се изследва тази функция за локален екстремум.

Решение: Прехвърлят се всички членове на уравнението от ляво и се получава

$$f(x, y) \equiv \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - 1 = 0.$$

```
> restart;
> eq:=x^2/4+y^2/9=1;
> f:=lhs(eq)-rhs(eq);
```

Намират се $f'_x = \dfrac{x}{2}$ и $f'_y = \dfrac{2y}{9}$. Тогава $y' = -\dfrac{\frac{x}{2}}{\frac{2y}{9}} = -\dfrac{9x}{4y}$.

```
> fx:=diff(f,x);fy:=diff(f,y);
> yprim:=-fx/fy;
```

Системата

$$\left| \begin{array}{l} -\dfrac{9x}{4y} = 0, \\ \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1, \\ \dfrac{2y}{9} \neq 0 \end{array} \right.$$

има две решения: $M(0,3)$ и $N(0,-3)$.

```
> statpoints:=solve({yprim=0,eq,fy<>0},{x,y});
```

Втората производна в стационарна точка е $y'' = -\dfrac{f''_{xx}}{f'_y}$. Стойността ѝ в стационарната точка $M(0,3)$ е равна на $-\dfrac{3}{4} < 0$, от което следва, че в тази точка неявно зададената функция притежава локален максимум, равен на 3. В точка $N(0,-3)$ локалният екстремум е минимум, равен на -3.

```
> ysecond:=-diff(f,x$2)/fy;
> subs(x=0,y=3,ysecond);ymax:=3;
> subs(x=0,y=-3,ysecond);ymin:=-3;
```

Графиката на неявно зададената функция може да се начертае с еднократно обръщение към библиотеката *plots*:

```
> plots[implicitplot](eq,x=-3..3,y=-4..4);
```

2.4 Локален екстремум на неявно зададена функция на две променливи

Дефиниция 2.4.1. Казваме, че уравнението $F(x,y,z) = 0$ определя z като *неявна функция* на x и y и пишем

$$F(x,y,z) = 0, \ z = z(x,y).$$

В случай на неявно зададена функция на две променливи стационарните точки на $z(x, y)$ са решенията на системата

$$\left| \begin{array}{l} \dfrac{\partial F(x,y,z)}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial F(x,y,z)}{\partial y} = 0, \\ F(x,y,z) = 0, \\ \dfrac{\partial F(x,y,z)}{\partial z} \neq 0, \end{array} \right.$$

и точките от D_f, в които първите частни производни не са дефинирани. В този случай детерминантата $\Delta(x, y)$ приема вида

$$\Delta(x,y) = \begin{vmatrix} -\dfrac{F''_{xx}}{F'_z} & -\dfrac{F''_{xy}}{F'_z} \\ -\dfrac{F''_{yx}}{F'_z} & -\dfrac{F''_{yy}}{F'_z} \end{vmatrix}.$$

Ако $\Delta(x, y)$ е положителна, неявно зададената функция има локален екстремум. При $-\dfrac{F''_{xx}}{F'_z} < 0$ екстремумът е максимум, а при $-\dfrac{F''_{xx}}{F'_z} > 0$ е минимум. Ако $\Delta(x, y) = 0$ се правят допълнителни изследвания. При $\Delta(x, y) < 0$ функцията няма екстремум.

Задача 23. Дадено е уравнението

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2x - 2y + 4z + 10,$$

което дефинира z като неявна функция на x и y. Да се изследва тази функция за локален екстремум.

Решение: Прехвърлят се всички членове на уравнението от ляво и се получава

$$F(x, y, z) \equiv x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z - 10 = 0.$$

```
> restart;
> eq:=x^2+y^2+z^2=2*x-2*y+4*z+10;
> F:=lhs(eq)-rhs(eq);
```

Пресмятат се частните производни на $F(x,y,z)$ и първите частни производни на неявно зададената функция

$$z'_x = -\frac{2x-2}{2z-4}, \quad z'_y = -\frac{2y+2}{2z-4}$$

```
> Fx:=diff(F,x); Fy:=diff(F,y); Fz:=diff(F,z);
> zprimx:=-Fx/Fz;zprimy:=-Fy/Fz;
```

Решава се системата уравнения и неравенство

$$\left| \begin{array}{l} -\dfrac{2x-2}{2z-4} = 0, \\ -\dfrac{2y+2}{2z-4} = 0, \\ x^2+y^2+z^2-2x+2y-4z-10=0, \\ 2z-4 \neq 0 \end{array} \right.$$

и се намират две стационарни точки $M(1,-1,-2)$ и $N(1,-1,6)$.

```
> statpoints:=solve({zprimx=0,zprimy=0,eq,Fz<>0},{x,y,z});
```

Матрицата от вторите частни производни в стационарните точки е

$$\left\| \begin{array}{cc} -\dfrac{2}{2z-4} & 0 \\ 0 & -\dfrac{2}{2z-4}, \end{array} \right\|$$

```
> Fxx:=diff(F,x,x);Fxy:=diff(F,x,y);
> Fyx:=diff(F,y,x);Fyy:=diff(F,y,y);
> M:=linalg[matrix]([[-Fxx/Fz,-Fxy/Fz],[-Fyx/Fz,-Fyy/Fz]]);
> d:=linalg[det](M);
```

Пресмята се детерминантата на тази матрица в точка $M(1,-1,-2)$, стойността ѝ е $\dfrac{1}{16} > 0$, следователно в тази стационарна точка функцията има локален екстремум. Стойността на втората частна производна в $M(1,-1,-2)$ е $z''_{xx}(1,-1,-2) = \dfrac{1}{4} > 0$, следователно екстремумът е минимум, $z_{min} = -2$.

```
> subs(x=1,y=-1,z=-2,M);subs(x=1,y=-1,z=-2,-Fxx/Fz);
```

Пресмятанията в стационарната точка $N(1,-1,6)$ показват наличие на локален максимум, $z_{max} = 6$.

```
> subs(x=1,y=-1,z=6,M);subs(x=1,y=-1,z=6,-Fxx/Fz);
```

Графиката на неявно зададената функция се чертае с *implicitplot3d*.

```
> plots[implicitplot3d](eq,x=-2..2,y=-2..2,z=-3..7);
```

2.5 Условен екстремум

Нека $D \subset \mathbb{R}^n$ и функциите $f, \varphi_m : D \to \mathbb{R}$ $(m = 1, 2, \dots, k)$. Да означим с E множеството от точки $x \in D$, в които дадените функции φ_m се анулират, т.е.

$$E = \{x|\ \varphi_m(x) = 0,\ m = 1, 2, \dots, k, \quad x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in D\}.$$

Уравненията $\varphi_m(x) = 0$ $(m = 1, 2, \dots, k)$ се наричат *условия на връзките.*

Дефиниция 2.5.1. Точката $x^0 \in D$ се нарича *точка на условен екстремум* на функцията f при условие, че са изпълнени условията на връзките, ако тя е точка на обичаен (локален) екстремум на тази функция, разглеждана само върху множеството E, в което са изпълнени дадените условия.

С други думи, стойността $f(x^0)$ се сравнява не с всички стойности в околност на x^0, а само с тези от множеството E.

Задачата за намиране на условен екстремум е свързана с изразяване на част от променливите чрез останалите, напр. $x_{n-k+1}, \dots, x_n$ чрез $x_1, \dots, x_{n-k}$ и заместване във функцията f. Обаче, разрешимостта в явен вид може да се окаже достатъчно затруднителна или даже невъзможна. Поради тази причина привеждаме друг начин на определяне на точките на условен екстремум, свързан с допълнително въведена функция.

Именно, за да се изследва за екстремум функцията $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ при ограничения

$$\left| \begin{array}{c} \varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \\ \varphi_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \\ \dots, \\ \varphi_k(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0. \end{array} \right. ,$$

се конструира *функцията на Лагранж*

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n; \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) + \sum_{m=1}^{k} \lambda_m \varphi_m(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

където параметрите $\lambda_m\,, m = 1, 2, \ldots, k$ се наричат *множители на Лагранж*. За получената функция се решава задачата за локален екстремум, като стационарните точки са решения на следната система

$$\left|\begin{array}{c}
\dfrac{\partial L(x_1, x_2, \ldots, x_n; \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k)}{\partial x_1} = 0, \\
\dfrac{\partial L(x_1, x_2, \ldots, x_n; \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k)}{\partial x_2} = 0, \\
\ldots, \\
\dfrac{\partial L(x_1, x_2, \ldots, x_n; \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k)}{\partial x_n} = 0, \\
\varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \\
\varphi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \\
\ldots, \\
\varphi_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \\
\lambda_m \neq 0\,, m = 1, 2, \ldots, k.
\end{array}\right.$$

Видът на екстремума се определя от знака на втория диференциал в съответната стационарна точка. По-надолу е дадено достатъчно условие за съществуване на условен екстремум.

Теорема (ДУ за условен екстремум). Нека $D \subset \mathbb{R}^n$ и функциите $f, \varphi_m : D \to \mathbb{R}$ $(m = 1, 2, \ldots, k)$ са два пъти непрекъснато диференцируеми в D. Ако точката x^0 удовлетворява условията на връзките и е стационарна точка за функцията на Лагранж, и ако вторият диференциал на функцията на Лагранж в тази точка е положително (отрицателно) дефинитна квадратична форма на променливите $\mathrm{d}x_1, \ldots, \mathrm{d}x_n$, при условие, че те удовлетворяват системата от уравнения

$$\frac{\partial \varphi_m}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1 + \cdots + \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_n}\mathrm{d}x_n = 0, \quad m = 1, \ldots k,$$

то точката x^0 е точка на строг условен минимум (максимум) за дадената функция, относно уравненията на връзките.

При това следва да се има предвид, че ако вторият диференциал на функцията на Лагранж се окаже положително (отрицателно) определен и без отчитане на условията на връзките в разглежданата точка, то той ще бъде такъв, разбира се, и при изпълнението им.

Задача 24. Да се изследва функцията $u = xy + yz$ за условен екстремум при ограничения

$$x^2 + y^2 = 2, \tag{2.5.1}$$

$$y + z = 2. \tag{2.5.2}$$

Решение: Съответната функция на Лагранж е

$$L(x, y, z; \lambda, \mu) = xy + yz + \lambda(x^2 + y^2 - 2) + \mu(y + z - 2).$$

Решенията на системата

$$\left| \begin{array}{c} y + 2\lambda x = 0, \\ x + z + 2\lambda y + \mu = 0, \\ y + \mu = 0, \\ x^2 + y^2 = 2, \\ y + z = 2, \\ \lambda \neq 0,\ \mu \neq 0 \end{array} \right.$$

са $M\left(1, 1, 1; -\dfrac{1}{2}, -1\right)$ и $N\left(-1, 1, 1; \dfrac{1}{2}, -1\right)$ и могат да се намерят със *solve*

```
> L:=x*y+y*z+lambda*(x^2+y^2-2)+mu*(y+z-2);
> Lx:=diff(L,x);Ly:=diff(L,y);Lz:=diff(L,z);
  Llambda:=diff(L,lambda);Lmu:=diff(L,mu);
> statpoints:=solve({Lx,Ly,Lz,Llambda,Lmu,lambda<>0,mu<>0},
{x,y,z,lambda,mu});
```

Матрицата от вторите частни производни е

$$\left\| \begin{array}{lll} 2\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 2\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \right\|,$$

което позволява да се напише вторият диференциал на функцията на Лагранж:

$$\mathrm{d}^2 L = L''_{xx}\,\mathrm{d}x^2 + L''_{yy}\,\mathrm{d}y^2 + L''_{zz}\,\mathrm{d}z^2 + 2L''_{xy}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + 2L''_{xz}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z + 2L''_{yz}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

$$\mathrm{d}^2 L = 2\lambda\,\mathrm{d}x^2 + 2\lambda\,\mathrm{d}y^2 + 2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + 2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

От уравненията на връзките се получава

$$2x\,\mathrm{d}x + 2y\,\mathrm{d}y = 0 \quad \text{и} \quad \mathrm{d}y + \mathrm{d}z = 0.$$

В стационарната точка $M\left(1,1,1;-\dfrac{1}{2},-1\right)$ са в сила зависимостите:

$$\mathrm{d}^2L(M) = -\mathrm{d}x^2 - \mathrm{d}y^2 + 2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + 2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,\ \mathrm{d}x + \mathrm{d}y = 0, \mathrm{d}y + \mathrm{d}z = 0.$$

От последните две уравнения се получава $\mathrm{d}x + \mathrm{d}z = -2\,\mathrm{d}y$ и следователно

$$\mathrm{d}^2L(M) = -\mathrm{d}x^2 - \mathrm{d}y^2 + 2(\mathrm{d}x + \mathrm{d}z)\,\mathrm{d}y = -\mathrm{d}x^2 - \mathrm{d}y^2 - 2\,\mathrm{d}y^2 < 0,$$

което показва, че в точката $M\left(1,1,1;-\dfrac{1}{2},-1\right)$ функцията $u = xy + yz$ има локален максимум $u_{max} = u(M) = 2$. В точката $N\left(-1,1,1;\dfrac{1}{2},-1\right)$ се получава

$$\mathrm{d}^2L(M) = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + 2(\mathrm{d}x + \mathrm{d}z)dy,\ -\mathrm{d}x + \mathrm{d}y = 0, \mathrm{d}y + \mathrm{d}z = 0.$$

От последните две уравнения следва, че $\mathrm{d}x + \mathrm{d}z = 0$ и следователно

$$\mathrm{d}^2L(M) = \mathrm{d}x^2\,\mathrm{d}y^2 - 2(\mathrm{d}x + \mathrm{d}z)\,\mathrm{d}y = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 > 0,$$

което показва, че в точката $N\left(-1,1,1;\dfrac{1}{2},-1\right)$ функцията $u = xy + yz$ има локален минимум $u_{min} = u(N) = 0$.

Задача 25. Да се намерят условните екстремуми на функцията $z = x + y$ при условие $xy = 1$ и се визуализират получените резултати в околност на стационарните точки чрез *MultivariateCalculus*.

Решение: Съответната функция на Лагранж е

$$L(x, y, z; \lambda) = x + y + \lambda(xy - 1).$$

Тогава стационарните точки са $M\,(1,1;-1)$ и $N\,(-1,-1;1)$ и се получават като решения на системата от уравненията

$$\lambda y + 1 = 0, \quad \lambda x + 1 = 0, \quad xy = 1.$$

Тъй като $L''_{xx} = L''_{yy} = 0$ и $L''_{xy} = L''_{yx} = \lambda$, то вторият диференциал на функцията на Лагранж е $\mathrm{d}^2L = 2\lambda\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, което очевидно не е дефинитна квадратична форма в околност на точките M и N. Но когато е изпълнено условието на връзката, имаме $x\mathrm{d}y + y\mathrm{d}x = 0$, откъдето в стационарните точки $\mathrm{d}y + \mathrm{d}x = 0$, и следователно $\mathrm{d}^2L = -2\lambda\mathrm{d}x^2$. Тогава за точката M (с $\lambda = -1$) при отчитане на условието $xy = 1$ се получава $\mathrm{d}^2L = 2\mathrm{d}x^2 \geq 0$, т.е. d^2L се превръща в положително дефинитна квадратична форма когато се изпълнява условието на връзката. Затова в точката $M\,(1,1)$ функцията $z = x + y$ има строг условен минимум при условие, че $xy = 1$, при което $z_{min} = 2$. Аналогично, $\mathrm{d}^2L = -2\mathrm{d}x^2 \leq 0$ за точката $N\,(-1,-1)$, поради което тя е точка на строг условен максимум за тази задача и $z_{max} = -2$.

В заключение е даден кодът за визуализиране на получените резултати.

```
> restart;with(Student[MultivariateCalculus]):
> LagrangeMultipliers(x+y,[x*y-1],[x,y]);
> LagrangeMultipliers(x+y,[x*y-1],[x,y],output=detailed);
> LagrangeMultipliers(x+y,[x*y-1],[x,y],output=plot);
```

Да отбележим за пълнота, че същият резултат се получава и ако се търсят локалните екстремуми на функцията $\zeta = x + 1/x$, получена след заместването на $y = 1/x$ от уравнението на връзката в дадената функция.

2.6 Задачи и отговори

1. Да се намери дефиниционното множество на функциите:

1.1. $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2 + 2x}$.

1.2. $z = \dfrac{x^2y}{2x + y}$.

1.3. $z = \arcsin(x + y)$.

1.4. $w = \dfrac{1}{\sqrt{xy}}$.

2. Да се намерят границите, в случай, че съществуват:

2.1. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\tan(xy)}{xy}$, 1.

2.2. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{y}{\sin(xy)}$. Не съществува.

2.3. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{1-\sqrt{1-xy}}{xy}$ $\dfrac{1}{2}$.

3. Да се провери дали уравнението се удовлетворява от посочената функция:

3.1. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$, $z(x,y) = \ln(x^2+y^2+1)$.

3.2. $\dfrac{x}{y}\dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{1}{\ln x}\dfrac{\partial z}{\partial y} = 2z$, $z(x,y) = x^y$.

3.3. $2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0$, $z(x,y) = 2\cos^2\left(y - \dfrac{x}{2}\right)$.

3.4. $\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial u}{\partial z} = 1$, $u(x,y,z) = x + \dfrac{x-y}{y-z}$.

4. Изследвайте за локален екстремум следните реални функции на много реални променливи и потвърдете резултатите с *gradplot* **и** *plot3d***:**

4.1. $z = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2$,
$z_{min,1} = z(1,1) = -2$, $z_{min,2} = z(-1,-1) = -2$.

4.2. $z = xy(1-x-y)$, $z_{max} = z\left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{1}{27}$.

4.3. $z = x^3 - y^3 - 3x + 3y + 2$,
$z_{max} = z(-1,1) = 6$, $z_{min} = z(1,-1) = -2$.

4.4. $u = x^3 + y^2 + z^2 + 12xy + 2z, u_{min} = u(24,-144,-1) = -6913$.

5. Да се изследват за локален екстремум следните неявно зададени функции и резултатите да се потвърдят с *implicitplot* **или с** *implicitplot3d* **:**

5.1. $x^3 + y^3 = 3xy$, $y = y(x)$,

$$y_{max} = y(\sqrt[3]{2}) = \sqrt[3]{4}.$$

5.2. $y^2 - 3y - \sin x = 0, y = y(x)$,

$$y_{max,k} = y\left(\frac{4k+1}{2}\pi\right) = \frac{3+\sqrt{13}}{2},\ y_{min,k} = y\left(\frac{4k-1}{2}\pi\right) = \frac{3+\sqrt{5}}{2}.$$

5.3. $x^2 + y^2 + z^2 - xz - yz + 2x + 2y + 2z - 2 = 0,\ z = z(x, y)$

$$z_{max} = z(-3+\sqrt{6}, -3+\sqrt{6}) = -4 + 2\sqrt{6},$$
$$z_{min} = z(-3-\sqrt{6}, -3-\sqrt{6}) = -4 - 2\sqrt{6}.$$

5.4. $2x^2 + 2y^2 + z^2 + 8xz - 8yz + 8 = 0, z = z(x, y)$,

$$z_{max} = z\left(-\frac{4}{15}\sqrt{30}, \frac{4}{15}\sqrt{30}\right) = -\frac{2}{15}\sqrt{30},$$
$$z_{min} = z\left(\frac{4}{15}\sqrt{30}, -\frac{4}{15}\sqrt{30}\right) = \frac{2}{15}\sqrt{30}.$$

6. Да се изследват за условен екстремум:

6.1. $z = xy$ при ограничение $2x + y = 1$,

$$\lambda = -\frac{1}{4}, z_{max} = z\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8}.$$

6.2. $z = x^2 + y^2$ при ограничение $x - y = 1$,

$$\lambda = -1, z_{min} = z\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}.$$

6.3. $u = x^2 + y^2 + z^2$ при условие $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} + \dfrac{z^2}{4} = 1$,

При $\lambda = -4$, $u_{min} = u(0, 0, -2) = u(0, 0, 2) = 4$,

при $\lambda = -16$, $u_{max} = u(-4, 0, 0) = u(4, 0, 0) = 16$.

6.4. $u = xyz$ при ограничения $x + y + z = 5$, $xy + yz + zx = 8$,

При $\lambda = 4, \mu = -2, z_{min} = z(1, 2, 2) = z(2, 1, 2) = z(2, 2, 1) = 4$,

$$\text{при } \lambda = \frac{16}{8}, \mu = -\frac{4}{3}, z_{max} = z\left(\frac{7}{3}, \frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right) =$$
$$= z\left(\frac{4}{3}, \frac{7}{3}, \frac{4}{3}\right) = z\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{7}{3}\right) = \frac{112}{27}.$$

Глава 3

Многократни интеграли

3.1 Двойни интеграли, приложение

Дефиниция 3.1.1. Нека D е ограничено подмножество в $\mathbb{R}^2$ и функцията $f(x,y)$ е дефинирана в D. С помощта на правите $x = x_i,\ \ i = 0, 1, \ldots, n,$ успоредни на ординатата, и правите $y = y_j,\ j = 0, 1, \ldots, m,$ успоредни на абсцисата, множеството D се разделя на краен брой подмножества. Образува се сумата $\sum_{i,j} f(\xi_i, \eta_j)\Delta x_i \Delta y_j$, където $x_i \le \xi_{i+1} \le x_{i+1},\ y_j \le \eta_{j+1} \le y_{j+1}$. Ако съществува границата на сумата при максимално $\Delta x_{i+1} = x_{i+1} - x_i$ и максимално $\Delta y_{j+1} = y_{j+1} - y_j$, клонящи към нула, тази граница се означава $\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ и се нарича *двоен интеграл* от функцията $f(x,y)$ върху можеството D.

Ако множеството, върху което се интегрира, е криволинеен трапец, т.е.

$$D = \begin{cases} a \le x \le b, \\ \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x), \end{cases}$$

където $a, b \in \mathbb{R}$ и функциите $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ са частично непрекъснати с несамопресичащи се графики в интервала $[a, b]$, то двойният интеграл се пресмята чрез два последователни единични интеграла:

$$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int\limits_a^b \left[\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y\right]\,\mathrm{d}x \equiv \int\limits_a^b \mathrm{d}x \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y \qquad (3.1.1)$$

Нека α и β са реални числа. Тогава е в сила следното свойство:

$$\iint\limits_D [\alpha f_1(x,y) + \beta f_2(x,y)]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \alpha \iint\limits_D f_1(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \beta \iint\limits_D f_2(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y. \tag{3.1.2}$$

Ако множеството, въху което се интегрира, е обединение на две множества, т.е. $D = D_1 \cup D_2$, които евентуално имат обши точки, принадлежащи единствено на контурите им, то

$$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint\limits_{D_1} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \iint\limits_{D_2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y. \tag{3.1.3}$$

Ако се интегрира върху правоъгълник

$$D = \left\{ \begin{array}{l} a \le x \le b, \\ c \le y \le d, \end{array} \right. ,$$

$a, b, c, d \in \mathbb{R}$ и подинтегралната функция е произведение на две функции на една променлива, $f(x,y) = g(x)h(y)$, то

$$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint\limits_D g(x)h(y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int\limits_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \times \int\limits_c^d h(y)\,\mathrm{d}y. \tag{3.1.4}$$

Нека функциите $x = x(u,v), y = y(u,v)$ са непрекъснато диференцируеми. Означаваме с $J(u,v) = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix}$ якобиана на смяната на променливите. Тогава

$$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint\limits_{\overline{D}} f(x(u,v), y(u,v))\,|J(u,v)|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v. \tag{3.1.5}$$

Лицето σ на гладка повърхнина, зададена чрез уравнението $z = f(x,y)$, която се проектира еднозначно върху равнината xOy в двумерното множество D, се пресмята чрез двойния интеграл

$$\sigma = \iint\limits_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y. \tag{3.1.6}$$

Ако повърхнината е зададена с векторно-параметрично уравнение

$$\mathbf{r}(u,v) = x(u,v)\mathbf{i} + y(u,v)\mathbf{j} + z(u,v)\mathbf{k}, \quad (u,v) \in D,$$

то

$$\sigma = \iint\limits_D \sqrt{EG - F^2}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v, \tag{3.1.7}$$

където

$$E = (\mathbf{r}'_u)^2,\ F = \mathbf{r}'_u\mathbf{r}'_v,\ G = (\mathbf{r}'_v)^2 \tag{3.1.8}$$

се наричат коефициенти на Гаус.

Обемът на цилиндрично тяло, ограничено отдолу от повърхнината с уравнение $z = f(x,y)$ и ограничено отгоре с повърхнината с уравнение $z = g(x,y)$, се пресмята чрез двойния интеграл

$$v = \iint\limits_D [g(x,y) - f(x,y)]\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, \tag{3.1.9}$$

където D е двумерно множество в равнината xOy , в което тялото се проектира ортогонално.

Задача 26. Да се пресметне $\iint\limits_D \left(3xy^2 - 4x^2y\right)\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, където D е правоъгълникът

$$D = \begin{cases} 1 \le x \le 3 \\ 0 \le y \le 1 \end{cases}.$$

Решение: Резултатът не зависи от реда на интегриране, т.е.

$$I = \int_1^3 \mathrm{d}x \int_0^1 (3xy^2 - 4x^2y)\,\mathrm{d}y = \int_1^3 \left(3x\frac{y^3}{3} - 4x^2\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_{y=0}^{y=1} \mathrm{d}x =$$

$$\int_1^3 \left(x - 2x^2\right)\ \mathrm{d}x = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{2x^3}{3}\right)\Bigg|_1^3 = \frac{9}{2} - \frac{54}{3} - \frac{1}{2} + \frac{2}{3} = -\frac{40}{3}$$

$$I = \int_0^1 \mathrm{d}y \int_1^3 (3xy^2 - 4x^2y)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(3y^2\frac{x^2}{2} - 4y\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{x=1}^{x=3} \mathrm{d}y =$$

$$\int_0^1 \left(12y^2 - \frac{104}{3}y\right)\ \mathrm{d}y = \left(4y^3 - \frac{52}{3}y^2\right)\Bigg|_0^1 = -\frac{40}{3}.$$

В случая интегрирането може да се извърши, като се използват формулите (3.1.4) и (3.1.2):

$$I = 3\int\limits_1^3 x\,\mathrm{d}x \times \int\limits_0^1 y^2\,\mathrm{d}y - 4\int\limits_1^3 x^2\,\mathrm{d}x \times \int\limits_0^1 y\,\mathrm{d}y = -\frac{40}{3}$$

```
> restart;
> int(int(3*x*y^2-4*x^2*y,y=0..1),x=1..3);
> int(int(3*x*y^2-4*x^2*y,x=1..3),y=0..1);
> 3*int(x,x=1..3)*int(y^2,y=0..1)-
  4*int(x^2,x=1..3)*int(y,y=0..1);
```

Задача 27. Нека D е ограничено равнинно множество, зададено чрез границата си, $D \equiv \{y = x,\ y = x + 2,\ y = 2,\ y = 6\}$. Да се пресметне интегралът $\iint\limits_D \left(x^2 + y^2\right)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$. Задачата да се реши чрез криволинейни трапеци с основи успоредни на абсцисата, чрез криволинейни трапеци, успоредни на ординатата, и да се сравнят получените резултати.

Решение: Множеството D е успоредник, на който две от страните са успоредни на абсцисната ос. Върховете на успоредника са точките $M(2, 2)$, $N(6, 6)$, $P(4, 6)$, $Q(0, 2)$. Множеството се описва със следния криволинеен трапец с основи, успоредни на абсцисата:

$$D = \begin{cases} 2 \le y \le 6, \\ y - 2 \le x \le y, \end{cases}$$

```
> restart;with(plots):
> fig1:=implicitplot([y=2,y=6,y=x,y=x+2],x=-1..7,y=-1..7,
  color=[red,blue,green,orange]):
> display(fig1);
```

Пресмятат се последователно следните единични интеграли:

$$I = \int\limits_2^6 \mathrm{d}y \int\limits_{y-2}^{y} (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}x = 224.$$

```
> I1:=int(x^2+y^2,x=y-2..y);
> I2:=int(I1,y=2..6);
```

За да се пресметне интегралът чрез криволинейни трапеци с основи, успоредни на ординатата, се прекарват правите $x = 2, x = 4$.

```
> fig2:=implicitplot([x=2,x=4],x=-1..7,y=-1..7,
  color=[black,black]):
> display(fig1,fig2);
```

Тогава $D = D_1 \cup D_2 \cup D_3$, където

$$D_1 = \begin{cases} 0 \le x \le 2, \\ 2 \le y \le x+2, \end{cases} \quad D_2 = \begin{cases} 2 \le x \le 4, \\ x \le y \le x+2, \end{cases} \quad D_3 = \begin{cases} 4 \le x \le 6, \\ x \le y \le 6, \end{cases}$$

$$\iint\limits_{D_1} (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int\limits_0^2 \mathrm{d}x \int\limits_2^{x+2} \mathrm{d}y = \frac{56}{3},$$

$$\iint\limits_{D_2} (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int\limits_2^4 \mathrm{d}x \int\limits_x^{x+2} \mathrm{d}y = 104,$$

$$\iint\limits_{D_3} (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int\limits_4^6 \mathrm{d}x \int\limits_x^{6} \mathrm{d}y = \frac{304}{3}.$$

```
> I1:=int(int(x^2+y^2,y=2..x+2),x=0..2);
> I2:=int(int(x^2+y^2,y=x..x+2),x=2..4);
> I3:=int(int(x^2+y^2,y=x..6),x=4..6);
> I1+I2+I3;
```

Задача 28. Да се пресметне $\iint\limits_D xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, където D е ограниченото множество от точки между параболата $y = x^2$ и правата $y = x + 2$.

Решение: Пресечните точки на двете равнинни криви са $A(-1;1)$ и $B(2;4)$ и могат да се намерят със *solve*

```
> restart;solve({y=x^2,y=x+2},{x,y});
> plot({x^2,x+2},x=-2..3);
```

Множеството D се представя като криволинеен трапец, чиито изродени в точки основи се считат успоредни на ординатата:

$$D = \begin{cases} -1 \le x \le 2 \\ x^2 \le y \le x+2 \end{cases}.$$

Интегрирането се извършва чрез MAPLE:

```
> int(int(x*y,y=x^2..x+2),x=-1..2);
```

и се получава $\frac{45}{8}$.

Задача 29. Да се пресметне $\iint\limits_D (x+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, където интегрирането се извършва по ограничено множество, зададено чрез границата си:

$$D \equiv \left\{y^2 = 2x,\ x+y=4,\ x+y=12\right\}.$$

Решение: Двете прави са успоредни помежду си и пресичат параболата, която е симетрична относно абсцисата, в точките $M_1(2,2)$, $M_2(8,-4)$, $N_1(18,-6)$ и $N_2(8,4)$.

```
> restart;
> solve({y^2=2*x,x+y=4},{x,y});solve({y^2=2*x,x+y=12},{x,y});
> plot({sqrt(2*x),-sqrt(2*x),4-x,12-x},x=0..19);
```

Основите на двата криволинейни трапеца, на които се разпада D, са върху правите $x=2, x=8, x=18$, т.е. $D = D_1 \cup D_2$, където:

$$D_1 = \left\{ \begin{array}{c} 2 \le x \le 8 \\ 4-x \le y \le \sqrt{2x} \end{array} \right., \qquad D_2 = \left\{ \begin{array}{c} 8 \le x \le 18 \\ -\sqrt{2x} \le y \le 12-x \end{array} \right.,$$

$$I = \int\limits_2^8 \mathrm{d}x \int\limits_{4-x}^{\sqrt{2x}} (x+y)\,\mathrm{d}y + \int\limits_8^{18} \mathrm{d}x \int\limits_{-\sqrt{2x}}^{12-x} (x+y)\,\mathrm{d}y = 543\frac{11}{15}.$$

Отговорът се потвърждава с MAPLE:

```
> int(int(x+y,y=4-x..sqrt(2*x)),x=2..8)+
> int(int(x+y,y=-sqrt(2*x)..12-x),x=8..18);
```

Задача 30. Да се пресметне лицето на ограничената равнинна фигура

$$D \equiv \{xy \ge 1,\ xy \le 2,\ y \ge x,\ y \le 4x,\ x \ge 0,\ y \ge 0\}.$$

Решение: Правата $y = x$ пресича хиперболите $xy = 1$ и $xy = 2$ съответно в точките $M_1(1,1)$ и $M_2(\sqrt{2},\sqrt{2})$. Правата $y = 4x$ пресича хиперболите съответно в точките $N_1\left(\frac{1}{2},2\right)$ и $N_2\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{4}{\sqrt{2}}\right)$.

```
> restart;
> solve({x*y=1,y=x},{x,y});solve({x*y=2,y=x},{x,y});
> solve({x*y=1,y=4*x},{x,y});solve({x*y=2,y=4*x},{x,y});
```

Множеството D може да се раздели на криволинейни трапеци чрез правите $x = \frac{1}{2}$, $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $x = 1, x = \sqrt{2}$ или чрез правите $y = 1$, $y = \sqrt{2}$, $y = 2$, $y = \frac{4}{\sqrt{2}}$. Ако се избере вторият вариант, трите криволинейни трапеца са (ФИГУРА 4, (a)):

$$D_1 = \begin{cases} 1 \leq y \leq \sqrt{2} \\ \frac{1}{y} \leq x \leq y \end{cases}, \quad D_2 = \begin{cases} \sqrt{2} \leq y \leq 2 \\ \frac{1}{y} \leq x \leq \frac{2}{y} \end{cases}, \quad D_3 = \begin{cases} 2 \leq y \leq \frac{4}{\sqrt{2}} \\ \frac{y}{4} \leq x \leq \frac{2}{y} \end{cases}$$

```
> plot({1/x,2/x,x,4*x,1,sqrt(2),2,4/sqrt(2)},x=0.25..2);
> int(int(1,x=1/y..y),y=1..sqrt(2))+
int(int(1,x=1/y..2/y),y=sqrt(2)..2)+
int(int(1,x=y/4..2/y),y=2..4/sqrt(2));
```

Площта на фигурата е $\ln 2$.

Задача 31. Да се реши задача 30 чрез смяна на променливите.

Решение: Подходяща смяна на променливите е

$$\begin{cases} u = xy \\ v = \frac{y}{x} \end{cases}, \qquad \begin{cases} x = u^{\frac{1}{2}} v^{-\frac{1}{2}} \\ y = u^{\frac{1}{2}} v^{\frac{1}{2}} \end{cases}.$$

Якобианът на смяната е

$$J(u,v) = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}} v^{-\frac{1}{2}} & -\frac{1}{2} u^{\frac{1}{2}} v^{-\frac{3}{2}} \\ \frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}} v^{\frac{1}{2}} & \frac{1}{2} u^{\frac{1}{2}} v^{-\frac{1}{2}} \end{vmatrix} = \frac{1}{2v}.$$

Образът на множеството, върху което се интегрира, е правоъгълникът

$$\overline{D} = \begin{cases} 1 \leq u \leq 2 \\ 1 \leq v \leq 4 \end{cases},$$

тогава

$$s = \iint\limits_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint\limits_{\overline{D}} \frac{1}{2v}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \int\limits_1^2 \mathrm{d}u \int\limits_1^4 \frac{1}{2v}\,\mathrm{d}v = \frac{1}{2}\int\limits_1^2 \ln|v|\big|_1^4\,\mathrm{d}u = \ln 2.$$

```
> with(VectorCalculus):
  J:=Jacobian([sqrt(u)/sqrt(v),sqrt(u)*sqrt(v)],[u,v]);
> with(linalg):DJ:=det(J);
> int(int(abs(DJ),v=1..4),u=1..2);
```

Задача 32. Да се пресметне

$$\iint\limits_D \sin\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

където $D \equiv \left\{\pi^2 \le x^2+y^2 \le 4\pi^2\right\}.$

Решение: Преходът от декартови в полярни координати се прави чрез формулите

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi. \end{cases}.$$

Матрицата на Якоби при тази смяна на променливите е

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{bmatrix},$$

детерминантата ѝ е равна на r. Образът на множеството, върху което се интегрира, е правоъгълникът

$$\overline{D} \equiv \left\{ \ \pi^2 \le r^2 \le 4\pi^2 \ \right\}$$

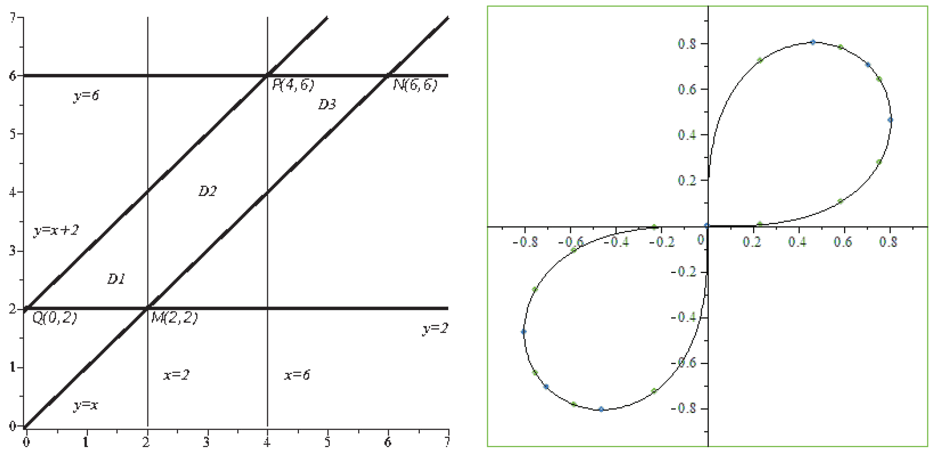
или

$$\overline{D} \equiv \left\{ \begin{array}{c} \pi \le r \le 2\pi, \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \end{array} \right\}$$

и

$$\iint\limits_D \sin\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint\limits_{\overline{D}} \sin r\,|r|\ \mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi = \int\limits_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int\limits_\pi^{2\pi} r\sin r\,\mathrm{d}r =$$

$$-\int\limits_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int\limits_\pi^{2\pi} r\,\mathrm{d}\cos r = \int\limits_0^{2\pi}\left(-r\cos r+\sin r\right)\Big|_\pi^{2\pi}\ \mathrm{d}\varphi = \int\limits_0^{2\pi}(-3\pi)\,\mathrm{d}\varphi = -6\pi^2.$$



(а) Елементарни фигури (б) Лемниската на Бернули

ФИГУРА 4. Множества, върху които се интегрира

```
> restart;
> with(VectorCalculus):
  J:=Jacobian([r*cos( phi),r* sin(phi)],[r,phi]);
> with(linalg):DJ:=det(J);
> int(int (sin( r)* r,r=Pi..2*Pi),Pi=0..2*Pi);
```

Задача 33. Да се пресметне лицето на ограничената равнинна фигура, чиято граница е лемниската на Бернули (ФИГУРА 4, (б))

$$D \equiv \left\{ \left(x^2 + y^2\right)^2 = 2a^2 xy,\ a > 0 \right\}.$$

Решение: Тази крива може да се начертае чрез

```
> restart;with(algcurves):
> a:=1; f:=(x^2+y^2)^2-2*a^2*x*y;
> plot_real_curve(f,x,y,colorOfCurve=red);
```

Поради симетрията на кривата относно координатното начало е достатъчно да се намери площта в първи квадрант и да се удвои. Пресмятанията ще се направят в полярни координати. Уравнението на лемниската на Бернули в полярни координати е

$$\bar{D} \equiv \left\{ r^2 = a^2 \sin 2\varphi \right\}.$$

Ограниченото двумерно множество в първи квадрант, което тя огражда, се определя от следната система неравенства:

$$\bar{D}_1 \equiv \left\{ 0 \leq r \leq a\sqrt{\sin 2\varphi},\ 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \right\}.$$

Тогава

$$\frac{s}{2}=\iint\limits_{D}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint\limits_{\overline{D}}r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int\limits_{0}^{a\sqrt{\sin 2\varphi}}r\,\mathrm{d}r=$$

$$\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left.\frac{r^2}{2}\right|_{0}^{a\sqrt{\sin 2\varphi}}\mathrm{d}\varphi=\frac{a^2}{2}\int\limits_{0}^{\pi/2}\sin 2\varphi\,\mathrm{d}\varphi=\frac{a^2}{2},$$

следователно лицето е равно на a^2.

Задача 34. Да се пресметне лицето на частта от повърхнината $z=xy$, която се намира във вътрешността на цилиндъра $x^2+y^2=1$.

Решение: Пресмятат се частните производни $\dfrac{\partial z}{\partial x}=y$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}=x$ и се конструира двойният интеграл

$$\sigma=\iint\limits_{D}\sqrt{1+x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,\ D\equiv\left\{x^2+y^2\le 1\right\}.$$

В полярна координатна система подинтегралната функция се изобразява в $\sqrt{1+r^2}$, якобианът на смяната е равен на r , образът на единичния централен кръг D е правоъгълникът

$$\overline{D}\equiv\left\{\begin{array}{c}0\le r\le 1,\\ 0\le\varphi\le 2\pi\end{array}\right\}.$$

$$\sigma=\iint\limits_{\overline{D}}\sqrt{1+r^2}\,r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi=\int\limits_{0}^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int\limits_{0}^{1}r\sqrt{1+r^2}\,\mathrm{d}r=$$

$$2\pi\int\limits_{0}^{1}\sqrt{1+r^2}\,\mathrm{d}\frac{r^2}{2}=\pi\int\limits_{0}^{1}\sqrt{1+r^2}\,\mathrm{d}\left(r^2+1\right)=\frac{2\pi}{3}\left(2\sqrt{2}-1\right)$$

```
> restart: with(plots):
> implicitplot3d({z=x*y,x^2+y^2=1},x=-1.5..1.5,
  y=-1.5..1.5,z=-1..1);
> I1:=int(1,phi=0..2*Pi);I2:=int(r*sqrt(1+r^2),r=0..1);I1*I2;
```

Задача 35. Да се пресметне лицето на частта от повърхнината на сферата $x^2+y^2+z^2=a^2$, която се намира във вътрешността на цилиндъра $x^2+y^2=ax, a>0$ (Задача на Вивиани).

Решение: Сферата се параметризира, като за параметри се приемат полярният и телесният ъгъл:

$$\mathbf{r}(\vartheta,\varphi)=a\cos\varphi\sin\vartheta\mathbf{i}+a\sin\varphi\sin\vartheta\mathbf{j}+a\cos\vartheta\mathbf{k},\quad 0\le\varphi\le 2\pi,\ 0\le\vartheta\le\pi$$

$$\mathbf{r}\prime_\vartheta=a\cos\varphi\cos\vartheta\mathbf{i}+a\sin\varphi\cos\vartheta\mathbf{j}-a\sin\vartheta\mathbf{k}$$

$$\mathbf{r}\prime_\varphi=-a\sin\varphi\sin\vartheta\mathbf{i}+a\cos\varphi\sin\vartheta\mathbf{j}$$

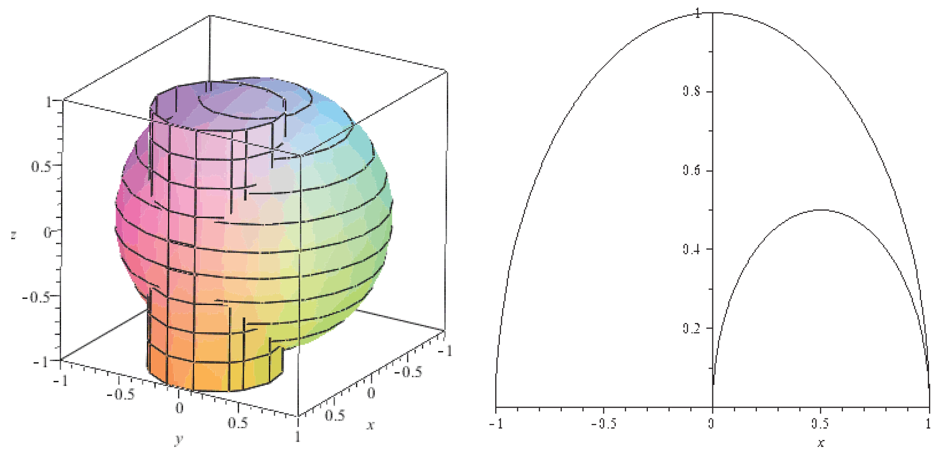
Коефициентите на Гаус (3.1.8) са

$$E=a^2\cos^2\varphi\cos^2\vartheta+a^2\sin^2\varphi\cos^2\vartheta+a^2\sin^2\vartheta=a^2,$$

$$F=0,\quad G=a^2\sin^2\vartheta,$$

тогава

$$\sqrt{EG-F^2}=a^2\sin\vartheta$$



(а) Линия на Вивиани (б) Ортогонална проекция в първи и втори квадрант

ФИГУРА 5. Задача на Вивиани

```
> restart; with(plots):a:=1;
> implicitplot3d({x^2+y^2+z^2=a^2,x^2+y^2=x},
  x=-1..1,y=-1..1,z=-1..1);
```

От съображение за симетрия (ФИГУРА 5, (а,б)) може да се пресметне една четвърт от търсеното лице, което се намира в първи октант. За точките върху кривата на Вивиани (пресечницата на сферата и цилиндъра) $\varphi + \vartheta = \dfrac{\pi}{2}$. Наистина, след заместване на x и y от параметричните уравнения в уравнението на цилиндъра, се получава $\sin\vartheta = \cos\varphi$. За търсеното лице се получава

$$\sigma = 4 \iint\limits_{\overline{D}} a^2 \sin\vartheta \, \mathrm{d}\varphi \, \mathrm{d}\vartheta,$$

където

$$D \equiv \left\{ \begin{array}{c} 0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2}, \\ 0 \le \vartheta \le \dfrac{\pi}{2} - \varphi \end{array} \right\}.$$

```
> I1:=int(sin(theta),theta=0..Pi/2-phi);
> I2:=int(I1,phi=0..Pi/2);
```

Отговор:

$$\sigma = 4a^2 \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right)$$

Задача 36. Да се пресметне с двоен интеграл обемът на тялото, дефинирано чрез неравенствата:

$$0 \le z \le x^2 + y^2, \; x^2 \le y \le 1.$$

Решение:

```
> restart; with(plots):
> implicitplot3d({z=x^2+y^2,y=x^2,y=0,z=0,x=1,x=-1},
  x=-2..2,y=-2..2,z=-2..2);
```

$$v = \iint\limits_{D} \left(x^2 + y^2 - 0 \right) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y,$$

където

$$D \equiv \left\{ \begin{array}{c} x^2 \le y \le 1, \\ -1 \le x \le 1 \end{array} \right\}.$$

$$v = \int\limits_{-1}^{1} \mathrm{d}x \int\limits_{x^2}^{1} \left(x^2 + y^2 \right) \, \mathrm{d}y = \int\limits_{-1}^{1} \left(x^2 y + \frac{y^3}{3} \right) \Bigg|_{y=x^2}^{y=1} \mathrm{d}x =$$

$$\int_{-1}^{1}\left[x^2\left(1-x^2\right)+\frac{\left(1-x^6\right)}{3}\right]\,\mathrm{d}x=\frac{88}{105}.$$

```
> I1:=int(x^2+y^2,y=x^2..1);
> I2:=int(I1,x=-1..1);
```

Задача 37. Да се пресметне с двоен интеграл обемът на ограниченото тяло между повърхнините

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, \quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2},$$

в полупространството $z>0$ при положителни стойности на параметрите a,b,c.

Решение:

```
> restart; with(plots):a:=1;b:=1;c:=1;
> implicitplot3d(
  {x^2/a^2+y^2/b^2+z^2/c^2=1,x^2/a^2+y^2/b^2=z^2/c^2},
  x=-2..2,y=-2..2,z=-2..2);
```

$$v=c\iint\limits_{D}\left(\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}-\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}\right)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

където

$$D\equiv\left\{\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leq\frac{1}{2}\ \right\}.$$

В обобщени полярни координати

$$\Big|\ x=ar\cos\varphi,\ y=br\sin\varphi\ \ .$$

$$v=abc\int_{0}^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_{0}^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\left(\sqrt{1-r^2}-r\right)r\,\mathrm{d}r$$

$$v=\frac{\pi abc}{3}\left(2-\sqrt{2}\right).$$

```
> I1:=int((sqrt(1-r^2)-r)*r,r=1..1/sqrt(2));
> I2:=int(I1,phi=0..2*Pi);
```

3.2 Тройни интеграли, приложение

Нека V е ограничено в $\mathbb{R}^3$ множество и функцията $f(x,y,z)$ е дефинирана във V.

Дефиниция 3.2.1. С помощта на равнините $x = x_i, i = 0, 1, \ldots, n$, перпендикулярни на абсцисата, равнините $y = y_j, j = 0, 1, \ldots, m$, перпендикулярни на ординатата, и равнините $z = z_k, k = 0, 1, \ldots, p$, перпендикулярни на апликатата, множеството V се разделя на краен брой подмножества. Образува се сума

$$\sum_{i,j,k} f(\xi_i, \eta_j, \zeta_k)\Delta x_i \Delta y_j, \Delta z_k,$$

където $x_i \le \xi_{i+1} \le x_{i+1}$, $y_j \le \eta_{j+1} \le y_{j+1}, z_k \le \zeta_{k+1} \le z_{k+1}$. Ако съществува границата на сумата при максимално $\Delta x_{i+1} = x_{i+1} - x_i$, максимално $\Delta y_{j+1} = y_{j+1} - y_j$ и максимално $\Delta z_{k+1} = z_{k+1} - z_k$, клонящи към нула, тази граница се означава $\iiint\limits_V f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ и се нарича *троен интеграл* от функцията $f(x,y,z)$ върху можеството V.

Ако интеграционното множество е елементарна фигура, т.е.

$$V = \left\{ \begin{array}{c} a \le x \le b \\ \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x) \\ \psi_1(x,y) \le z \le \psi_2(x,y) \end{array} \right. ,$$

то тройният интеграл се пресмята чрез три последователни единични интеграла:

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int\limits_a^b \left\{ \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \left[\int\limits_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z \right] \mathrm{d}y \right\} \mathrm{d}x. \quad (3.2.1)$$

Използва се и следният еквивалентен запис:

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int\limits_a^b \mathrm{d}x \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \mathrm{d}y \int\limits_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z. \quad (3.2.2)$$

Нека α и β са реални числа. Тогава е в сила следното свойство:

$$\iiint\limits_V \left[\alpha f_1(x,y,z) + \beta f_2(x,y,z)\right] \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \alpha \iiint\limits_V f_1 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + \beta \iiint\limits_V f_2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z. \tag{3.2.3}$$

Ако множеството, въху което се интегрира, е обединение на две множества, т.е. $V = V_1 \cup V_2$, които нямат други обши точки, освен евентуално принадлежащи на контурите им, то

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iiint\limits_{V_1} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + \iiint\limits_{V_2} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z. \tag{3.2.4}$$

Ако се интегрира върху паралелепипед

$$V = \begin{cases} a_1 \le x \le a_2 \\ b_1 \le y \le b_2 \\ c_1 \le z \le c_2 \end{cases},$$

$a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ и подинтегралната функция е произведение на три функции на една променлива, $f(x,y,z) = g(x)h(y)p(z)$, то

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int\limits_{a_1}^{a_2} g(x)\,\mathrm{d}x \times \int\limits_{b_1}^{b_2} h(y)\,\mathrm{d}y \times \int\limits_{c_1}^{c_2} p(z)\,\mathrm{d}z. \tag{3.2.5}$$

Нека функциите $x = x(u,v,w)$, $y = y(u,v,w)$, $z = z(u,v,w)$ са непрекъснато диференцируеми. С $J(u,v,w) = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v & x'_w \\ y'_u & y'_v & y'_w \\ z'_u & z'_v & z'_w \end{vmatrix}$ означаваме якобиана на смяната на променливите. Ако той запазва знака си във V, то

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iiint\limits_{\overline{V}} f(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w))\,|J(u,v,w)|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w, \tag{3.2.6}$$

където $\overline{V}$ е образът на V при смяната.

Задача 38. Да се пресметне $\iiint\limits_V xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, където

$$V \equiv \{z \le xy,\, x+y \le 1,\, x \ge 0,\, y \ge 0,\, z \ge 0\}\,.$$

Решение: Множеството, върху което се интегрира, е зададено като сечение на полупространства, остава да се подреди иформацията в искания вид:

$$V = \left\{ \begin{array}{c} 0 \le z \le xy \\ 0 \le y \le 1-x \\ 0 \le x \le 1 \end{array} \right. .$$

Неравенството $x \le 1$ е следствие от веригата неравенства $0 \le y \le 1-x$. Може да се начертае границата на тялото, върху което се интегрира:

```
> restart; with(plots):
> implicitplot3d({z=x*y,y=1-x,x=1,x=0,y=0,z=0},
x=0..2,y=0..2,z=0..2);
```

Извършват се последователни интегрирания:

$$I = \int\limits_0^1 \mathrm{d}x \int\limits_0^{1-x} \mathrm{d}y \int\limits_0^{xy} xy\,\mathrm{d}z = \int\limits_0^1 \mathrm{d}x \int\limits_0^{1-x} xy\, z|_{z=0}^{z=xy}\, \mathrm{d}y = \int\limits_0^1 \mathrm{d}x \int\limits_0^{1-x} x^2y^2\,\mathrm{d}y$$

$$I = \int\limits_0^1 x^2 \left.\frac{y^3}{3}\right|_0^{1-x} \mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int\limits_0^1 x^2\,(1-x)^3\,\mathrm{d}x = \frac{1}{180},$$

които се правят и с MAPLE

```
> I1:=int(x*y,z=0..x*y);
> I2:=int(I1,y=0..1-x);
> I3:=int(I2,x=0..1);
```

Задача 39. Да се пресметне $\iiint\limits_V y\cos(z+x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, където

$$V \equiv \left\{ y = \sqrt{x},\, x+z = \frac{\pi}{2},\, y=0,\, z=0 \right\}.$$

Решение: Тялото, върху което се интегрира, е описано чрез границата си. За да се интегрира върху него, е необходимо то да е зададено чрез сечение на полупространства. Функцията квадратен корен е дефинирана при неотрицателна стойност на аргумента си, следователно $0 \leq x$. Горна граница за x може да се получи от второто уравнение, описващо $V\colon 0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{2} - z$. От веригата неравенства $0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{2} - z$ следва $z \leq \dfrac{\pi}{2}$. Окончателно

$$V = \begin{cases} 0 \leq y \leq \sqrt{x}, \\ 0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{2} - z, \\ 0 \leq z \leq \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

```
> restart; with(plots):
> implicitplot3d({y=sqrt(x),x+z=Pi/2,y=0,z=0},
x=0..2,y=0..2,z=0..2);
```

Последователно се интегрира

$$I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}z \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}-z} \mathrm{d}x \int\limits_0^{\sqrt{x}} y\cos(z+x)\ \mathrm{d}y = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}z \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}-z} \cos(z+x)\ \frac{y^2}{2}\bigg|_{y=0}^{y=\sqrt{x}}\ \mathrm{d}x =$$

$$\frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}z \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}-z} x\cos(z+x)\ \mathrm{d}(x+z) = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}z \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}-z} x\,\mathrm{d}\sin(z+x) =$$

$$\frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left[x\sin(z+x)\Big|_{x=0}^{x=\frac{\pi}{2}-z} - \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}-z} \sin(z+x)\ \mathrm{d}x \right] \mathrm{d}z =$$

$$\frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\left(\frac{\pi}{2} - z\right) + \cos(z+x)\Big|_{x=0}^{x=\frac{\pi}{2}-z} \right] \mathrm{d}z = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2} - z - \cos z\right) \mathrm{d}z = -\frac{1}{2} + \frac{\pi^2}{16}$$

```
> I1:=int(y*cos(z+x),y=0..sqrt(x));
> I2:=int(I1,x=0..Pi/2-z);
> I3:=int(I2,z=0..Pi/2);
```

Задача 40. Да се пресметне $\iiint\limits_V \left(x^2+y^2\right)\,dx\,dy\,dz$, където

$$V \equiv \left\{x^2+y^2=2z,\ z=2\right\}.$$

Решение: В случая е подходящо да се премине към цилиндрични координати съгласно формулите за трансформация

$$\left|\begin{array}{c} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z \end{array}\right. .$$

Якобианът на смяната е равен на r. При тази смяна подинтегралната функция се изобразява във функцията r^2, а интеграционното множество V – в множеството

$$\overline{V} = \left\{r^2 = 2z, z = 2\right\}.$$

```
> restart; with(plots):
> implicitplot3d({x^2+y^2=2.z,z=2},
x=-3..3,y=-3..3,z=0..3);
```

Интегрира се върху ограничено множество. Формално има две възможности: $2 \le z \le \dfrac{1}{2}r^2$ или $\dfrac{1}{2}r^2 \le z \le 2$. Първото неравенство води до неограничен отгоре интервал за r, т.е. $2 \le r$, а второто – до ограничен отгоре интервал за r, $r \le 2$, и като се вземе предвид естествената долна граница за r, се получава $0 \le r \le 2$. За полярния ъгъл φ няма ограничения, в такъв случай се вземат естествените граници, в случая $0 \le \varphi < 2\pi$. Тогава

$$\overline{V} = \left\{\begin{array}{c} \dfrac{1}{2}r^2 \le z \le 2 \\ 0 \le r \le 2 \\ 0 \le \varphi < 2\pi \end{array}\right. ,$$

$$I = \iiint\limits_{\overline{V}} r^3\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}z = \int\limits_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int\limits_0^2\mathrm{d}r\int\limits_{\frac{r^2}{2}}^{2} r^3\,\mathrm{d}z = \int\limits_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int\limits_0^2 r^3\left(2-\frac{r^2}{2}\right)\mathrm{d}r =$$

$$\int_0^{2\pi} \left(\frac{2r^4}{4} - \frac{r^6}{12} \right) \Bigg|_{r=0}^{r=2} \mathrm{d}\varphi = \frac{16\pi}{3}.$$

```
> I1:=int(r^3,z=r^2/2..2);
> I2:=int(I1,r=0..2);
> I3:=int(I2,phi=0..2*Pi);
```

Задача 41. Да се пресметне $\iiint\limits_V \left(4x^2 + 9y^2 + 36z^2\right)^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, където

$$V \equiv \left\{ \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} + z^2 \le 1 \right\}.$$

Решение: Множеството, върху което се интегрира, има за граница елипсоид, използват се обобщени сферични координати:

$$\left| \begin{array}{r} x = 3r\cos\varphi\sin\vartheta, \\ y = 2r\sin\varphi\sin\vartheta, \\ z = r\cos\vartheta. \end{array} \right.$$

Якобианът на смяната на променливите е $J = 6r^2\sin\vartheta$. Образът на подинтегралната функция е

$$\overline{f}(r,\varphi,\vartheta) = \left(36r^2\cos^2\varphi.\sin^2\vartheta + 36r^2\sin^2\varphi\sin^2\vartheta + 36r^2\cos^2\vartheta\right)^2 =$$

$$= 36^2r^4,$$

а образът на множеството, върху което се интегрира, съответно

$$\overline{V} = \left\{ \begin{array}{c} 0 \le r \le 1 \\ 0 \le \vartheta \le \pi \\ 0 \le \varphi < 2\pi \end{array} \right. ,$$

$$I = \iiint\limits_{\overline{V}} 36^2 6r^6 \sin\vartheta \,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\vartheta = \frac{31104\pi}{7},$$

```
> I1:=int(r^6,r=0..1);
> I2:=int(sin(tetha),tetha=0..Pi);
> I3:=int(1,phi=0..2*Pi);
> 36^2*6*I1*I2*I3;
```

Задача 42. Да се пресметне обемът на тялото, зададено чрез

$$V \equiv \left\{ z \le x+y,\ \left(x^2+y^2\right)^2 = 2xy,\ x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0 \right\}.$$

Решение: Обемът се пресмята чрез $\iiint\limits_V \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$. В случая може да се премине към цилиндрична координатна система (виж задача 40), като целта е да се опрости максимално множеството, върху което се интегрира.

```
> restart;
> D1:=changecoords(0<z<x+y,[x,y,z],cylindrical,[r,phi,z]);
> D2:=changecoords((x^2+y^2)^2<2*x*y,[x,y,z],
  cylindrical,[r,phi,z]);
  D2:=simplify(D2,trig);
> D3:=changecoords(0<x,[x,y,z],cylindrical,[r,phi,z]);
> D4:=changecoords(0<y,[x,y,z],cylindrical,[r,phi,z]);
> M,d:=VectorCalculus[Jacobian]([r*cos(phi),r*sin(phi),z],
  [r,phi,z],'determinant');
> J:=simplify(d,trig);
```

$$\overline{V} = \left\{ \begin{array}{c} 0 \le z \le r\cos\varphi + r\sin\varphi, \\ r^4 \le 2r^2\cos\varphi\sin\varphi, \\ 0 \le r\cos\varphi, 0 \le r\sin\varphi \end{array} \right. \equiv \left\{ \begin{array}{c} 0 \le z \le r\cos\varphi + r\sin\varphi, \\ 0 \le r \le \sqrt{2\cos\varphi\sin\varphi}, \\ 0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2}. \end{array} \right.$$

$$v = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\varphi \int\limits_0^{\sqrt{\sin 2\varphi}} \mathrm{d}r \int\limits_0^{r\cos\varphi + r\sin\varphi} r\,\mathrm{d}z = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\varphi \int\limits_0^{\sqrt{\sin 2\varphi}} r^2\left(\cos\varphi + \sin\varphi\right)\,\mathrm{d}r =$$

$$\frac{1}{3}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\varphi + \sin\varphi)\sin^{\frac{3}{2}} 2\varphi\,\mathrm{d}\varphi$$

Формално прилагане на MAPLE

```
> I1:=int(J,z=0..r*cos(phi)+r*sin(phi));
> I2:=int(I1,r=0..sqrt(sin(2*phi)));
> I3:=int(I2,phi=0..Pi/2);
```

за пресмятане на обема.

Решението с молив на лист хартия е

$$I = \frac{1}{3}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left[1 - (\sin\varphi - \cos\varphi)^2\right]^{\frac{3}{2}} \mathrm{d}\,(\sin\varphi - \cos\varphi)$$

Ако се положи $t = \sin\varphi - \cos\varphi$, се получава

$$v = \frac{1}{3}\int\limits_{-1}^{1} \left(1 - t^2\right)^{\frac{3}{2}} dt = \frac{2}{3}\int\limits_0^1 \left(1 - t^2\right)^{\frac{3}{2}} \mathrm{d}t.$$

След втора смяна на променливите $t = \sin p$ интегралът придобива вида $v = \frac{2}{3}\int\limits_0^{\pi/2} \cos^4 p \,\mathrm{d}p = \frac{\pi}{8}$.

Задача 43. Да се намери обемът на тялото, зададено чрез

$$V \equiv \left\{z = x^2 + y^2,\ x^2 + y^2 = x,\ x^2 + y^2 = 2x,\ z = 0\right\}.$$

Решение: Обемът се пресмята чрез $\iiint\limits_V \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$. Преминава се в цилиндрична координатна система

$$\overline{V} = \left\{\begin{array}{c} z = r^2 \\ r^2 = r\cos\varphi \\ r^2 = 2r\cos\varphi \\ z = 0 \end{array}\right. \equiv \left\{\begin{array}{c} z = r^2 \\ r = \cos\varphi \\ r = 2\cos\varphi \\ z = 0 \end{array}\right. .$$

От $r = \cos\varphi$ следва $\cos\varphi \geq 0$ или $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$. Следователно,

$$\overline{V} = \left\{\begin{array}{c} 0 \leq z \leq r^2, \\ \cos\varphi \leq r \leq 2\cos\varphi, \\ -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}. \end{array}\right.$$

```
> I1:=int(r,z=0..r^2);
> I2:=int(I1,r=cos(phi)..2*cos(phi));
> I3:=int(I2,phi=-Pi/2..Pi/2);
```

Обемът е равен на $\frac{45\pi}{32}$.

3.3 Задачи и отговори

1. Пресметнете двойните интеграли:

1.1 $\iint\limits_D ye^{-x}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, \quad D \equiv \left\{x^2 \le y,\, x^2+y^2 \le 2x\right\}, \quad 33e^{-1} - 12.$

1.2 $\iint\limits_D \left(x-y^2\right)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, \quad D \equiv \left\{y = \dfrac{x}{3},\, x = y^2\right\}, \quad \dfrac{81}{20}.$

1.3 $\iint\limits_D xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, \quad D \equiv \left\{y = x^2,\, x - y + 2 = 0\right\}, \quad \dfrac{45}{8}.$

1.4 $\iint\limits_D \sqrt{xy}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, \quad D \equiv \left\{\left(\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{y^2}{3}\right)^4 \le \dfrac{xy}{\sqrt{6}}\right\}, \quad \dfrac{2}{\sqrt[4]{6}}.$

1.5 $\iint\limits_D x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, \quad D \equiv \left\{x^2+y^2 \le 2y,\, x \ge 0,\, y \ge \dfrac{1}{2}\right\}, \quad \dfrac{9}{16}.$

1.6 $\iint\limits_D \left(x^2+y^2\right)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, \quad D \equiv \left\{x^2+y^2-2y \le 0\right\}, \quad \dfrac{3\pi}{2}.$

2. Пресметнете лицата на ограничените равнинни множества D :

2.1 $D \equiv \left\{xy = 2,\, x^2+y^2 = 1\,, x = 2,\, y = 3,\, x \ge 0,\, y \ge 0\right\}, s = 4 - \dfrac{\pi}{4}.$

2.2 $D \equiv \left\{x^2+y^2 = 4,\, x = y^2,\, x = 3\right\} \quad s = 4\sqrt{3} - \dfrac{1}{3} - \dfrac{\pi}{2}.$

2.3 $D \equiv \left\{x^2+y^2 = 1,\, y = -x^2+4,\, x = -2\right\}, \quad s = \dfrac{56}{3} - \pi.$

2.4 $D \equiv \left\{x^2-2x+y^2-2y \le 0,\, x \ge 0,\, y \ge 0\right\}, \quad s = \pi.$

2.5 $D \equiv \left\{y = x^2,\, x+y \le 1,\, -x+y \le 1\right\}, \quad s = \dfrac{5\sqrt{5}-7}{6}.$

2.6 $D \equiv \left\{x^2+y^2 \le 2,\, xy \le 1,\, x \le y^2\right\}, \quad s = 3,35.$

Упътване: използвайте $evalf$, за да получите приближената стойност на лицето в последната задача.

3. Пресметнете лицата на ограничените равнинни множества D, чиито граници са затворените криви:

3.1 $D \equiv \left\{ \left(x^2+y^2\right)^2 = 2y^2 \right\}$, $\quad s = \dfrac{5\pi}{8}.$

3.2 $D \equiv \left\{ \left(x^2+y^2\right)^3 = x^4+y^4 \right\}$, $\quad s = \dfrac{3\pi}{4}.$

3.3 Буклата на Декартовия лист, $D \equiv \left\{ x^3+y^3 = 3axy,\ a>0 \right\}$,

$$s = \frac{3a^2}{2}.$$

3.4 $D \equiv \left\{ \left(\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} \right)^2 = x^2 y \right\}$, $\quad s = \dfrac{\pi}{2}.$

3.5 Астроидата $D \equiv \left\{ x^{2/3}+y^{2/3} = a^{2/3} \right\} \quad (a>0)$, $\quad s = \dfrac{3\pi a^2}{8}.$

Упътване. За да намерите лицето в 3.5, използвайте обобщената полярна смяна $x = \rho\cos^3\varphi,\ y = \rho\sin^3\varphi$.

4. Пресметнете лицето на частта от повърхнината:

4.1 $z = \sqrt{x^2+y^2}$, разположена във вътрешността на цилиндъра $\left(x^2+y^2\right)^2 = a^2\left(x^2-y^2\right)$, $a>0$, $\quad \sigma = \dfrac{\pi a^2}{2}.$

4.2 $\left(x^2+y^2\right) z = x+y$, при $1 \le x^2+y^2 \le 4, x>0, y>0$,

$$\sigma = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \left[3 - \sqrt{\frac{3}{2}} + \ln\left(\sqrt{\frac{3}{2}} + 1 \right) \right].$$

4.3 $x^2+y^2+z^2 = a^2$, намираща се във вътрешността на цилиндъра $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1,\ b \le a$, $\quad \sigma = 8a^2 \arcsin\dfrac{b}{a}.$

4.4 $\mathbf{r}(u,v) = u\cos v\mathbf{i} + u\sin v\mathbf{j} + v\mathbf{k}$ при $0 \le u \le a,\ 0 \le v \le 2\pi$,

$$\sigma = \pi\left(a\sqrt{1+a^2} + \frac{1}{2}\ln\left(a+\sqrt{a^2+1}\right) \right).$$

5. Пресметнете обемите на телата, ограничени от повърхнините, чрез двоен интеграл:

5.1 $z = xy,\ x + y + z = 1,\ z = 0,\qquad v = \dfrac{17}{12} - 2\ln 2.$

5.2 $y = \sqrt{x}, y = 2\sqrt{x}, z = 0, x + z = 6,\qquad v = \dfrac{48}{5}\sqrt{6}.$

5.3 $z = x^2 + y^2,\ z = x + y,\qquad v = \dfrac{\pi}{8}.$

5.4 $x^2 + y^2 - z = 0,\ \left(x^2 + y^2\right)^2 = x^2 - y^2,\qquad v = \dfrac{\pi}{8}.$

6. Да се пресметнат тройните интеграли:

6.1 $\iiint\limits_V xy^2z^3\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,\ V \equiv \{z = xy, y = x, x = 1, z = 0\},\qquad \dfrac{1}{164}.$

6.2 $\iiint\limits_V \dfrac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{(1 + x + y + z)^3},\ V \equiv \{x + y + z = 1, x = 0, y = 0, z = 0\},$

$$\frac{2\ln 2 - 1}{4}.$$

6.3 $\iiint\limits_V \sqrt{x^2 + y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,\ V \equiv \left\{x^2 + y^2 = z^2, z \leq 1\right\},\qquad \dfrac{\pi}{2}.$

6.4 $\iiint\limits_V z^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,\ V \equiv \left\{x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, x^2 + y^2 + z^2 \leq 2z\right\},$

$$\frac{59\pi}{480}.$$

7. Пресметнете обемите на телата чрез троен интеграл:

7.1 $z = xy,\ x + y + z = 1,\ z = 0,\qquad v = \dfrac{17}{12} - 2\ln 2.$

7.2 $y = \sqrt{x}, y = 2\sqrt{x}, z = 0, x + z = 6,\qquad v = \dfrac{48}{5}\sqrt{6}.$

7.3 $z = x^2 + y^2,\ z = x + y,\qquad v = \dfrac{\pi}{8}.$

7.4 $x^2 + y^2 - z = 0,\ \left(x^2 + y^2\right)^2 = x^2 - y^2,\qquad v = \dfrac{\pi}{8}.$

Глава 4

Криволинейни и повърхнинни интеграли

4.1 Криволинейни интеграли от първи род

Нека функцията $f(x, y, z)$ е дефинирана върху гладката крива Γ с начална точка A и крайна точка B. Кривата се разделя на дъгички с помощта на точките $A \equiv A_0, A_1, \ldots, A_n \equiv B$, $A_i(x_i, y_i, z_i)$, и върху всяка дъгичка произволно се избира точка $M_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$, в която се пресмята стойността $f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$ на функцията f. Дължината на дъгичката се означава с Δl_i.

Дефиниция 4.1.1. Ако съществува границата на интегралната сума

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta l_i$$

при максимална дължина на дъгичките на деление клоняща към нула, то границата на тази сума се нарича *криволинеен интеграл от първи род* от функцията $f(x, y, z)$ върху кривата Γ и се пише

$$\int\limits_{\Gamma} f(x, y, z) \mathrm{d}l = \lim_{max \Delta l_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta l_i.$$

Ако интеграционната крива е в параметричен вид:

$$\Gamma \equiv \{x = \varphi(t),\ y = \psi(t),\ z = \chi(t), |\, t \in [t_1, t_2]\}, \tag{4.1.1}$$

то криволинейният интеграл от първи род се пресмята чрез единичен определен интеграл:

$$\int\limits_{\Gamma} f(x,y,z)\,\mathrm{d}l = \int\limits_{t1}^{t2} f(\varphi(t),\psi(t),\chi(t))\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)+\chi'^2(t)}\,\mathrm{d}t \qquad (4.1.2)$$

Адитивностите на криволинейния интеграл от първи род по отношение на подинтегралната функция и относно интеграционната крива следват от (4.1.2).

Лицето σ на цилиндър с управителна линия

$$C \equiv \{x=\varphi(t),\ y=\psi(t),\ z=0, |\, t\in[t_1,t_2]\}\,,$$

който е ограничен от равнината xOy и от линията

$$C^* \equiv \{x=\varphi(t),\ y=\psi(t),\ z=\chi(t), |\, t\in[t_1,t_2]\}\,,$$

се пресмята по формулата

$$\int\limits_{C} z\,\mathrm{d}l, \qquad (4.1.3)$$

където $\mathrm{d}l$ е линейният елемент на дъгата C.

Дължината на дъгата Γ се пресмята чрез криволинейния интеграл

$$\int\limits_{\Gamma} \mathrm{d}l. \qquad (4.1.4)$$

Ако $\rho(x,y,z)$ е плътността на материалната крива Γ, то масата m на тази крива се пресмята чрез криволинеен интеграл от първи род:

$$m = \int\limits_{\Gamma} \rho(x,y,z)\mathrm{d}l.$$

Центърът на тежестта $G(x_G,y_G,z_G)$ на материална крива има координати:

$$x_G = \frac{\int\limits_{\Gamma} x\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}l}{\int\limits_{\Gamma} \rho(x,y,z)\,\mathrm{d}l},\ y_G = \frac{\int\limits_{\Gamma} y\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}l}{\int\limits_{\Gamma} \rho(x,y,z)\,\mathrm{d}l},\ z_G = \frac{\int\limits_{\Gamma} z\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}l}{\int\limits_{\Gamma} \rho(x,y,z)\,\mathrm{d}l}. \qquad (4.1.5)$$

Криволинейни интеграли от първи род се пресмятат с $PathInt$ в библиотека $VectorCalculus$.

Задача 44 . Да се пресметне $\int\limits_{\Gamma} \sqrt{y}\,\mathrm{d}l$, където Γ е дъга от циклоидата

$$\Gamma \equiv \{x = t - \sin t,\ y = 1 - \cos t,\ |\, t \in [0, 2\pi]\}\,.$$

Решение: Прилага се (4.1.2):

$$\int\limits_{\Gamma} \sqrt{y}\,\mathrm{d}l = \int\limits_{0}^{2\pi} \sqrt{1-\cos t}\sqrt{(1-\cos t)^2 + \sin^2 t}\,\mathrm{d}t = \sqrt{2}\int\limits_{0}^{2\pi} (1-\cos t)\,\mathrm{d}t,$$

$$\int\limits_{\Gamma} \sqrt{y}\,\mathrm{d}l = 2\sqrt{2}\pi.$$

В библиотека *VectorCalculus* може да се получи помощ за използването на *PathInt* и полученият резултат да се сравни с намерения по-горе :

```
> restart:
> ?PathInt
> with(VectorCalculus):
> PathInt(sqrt(y),[x,y]=Path(<t-sin(t),1-cos(t)>,t=0..2*Pi));
```

Задача 45. Пресметнете лицето на цилиндричната повърхнина с управителна крива $x^2 + y^2 = 1$, ограничена отдолу от равнината xOy и отгоре от повърхнината $z = xy$.

Решение: Параметрични уравнения на окръжността:

$$C \equiv \{x = \cos t,\ y = \sin t,\ |\, t \in [0, 2\pi]\}\,.$$

От графиката се вижда наличие на симетрия

```
> with(plots);
> implicitplot3d({z=0,z=x*y,x^2+y^2=1},x=-2..2,y=-2..3,z=0..2);,
```

която се използва при пресмятанията по формула (4.1.3) :

$$\sigma = \int\limits_{C} z\,\mathrm{d}s = 2\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos t \sin t\sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2}\,\mathrm{d}t = \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t\,\mathrm{d}t = 1$$

```
> restart:
> with(VectorCalculus):
>2* PathInt(x*y,[x,y]=Path(<cos(t),sin(t)>,t=0..Pi/2));
```

Задача 46. С помощта на криволинеен интеграл от първи род да се намери дължината на астроидата

$$C \equiv \left\{x = a\cos^3 t,\ y = a\sin^3 t,\ | \, t \in [0, 2\pi]\right\}, a > 0.$$

Решение: От графиката на астроидата поради симетрия

```
> restart:with(plots):
> plot([sin(t)^3,cos(t)^3, t =0..2*Pi]);
```

е достатъчно да се сметне дължината на клона на кривата в първи квадрант по формула (4.1.4) и да се умножи по 4:

$$l = \int\limits_C \mathrm{d}l = 4\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(-3a\cos^2 t\sin t)^2 + (3a\sin^2 t\cos t)^2}\,\mathrm{d}t =$$

$$4\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{3a}{2}\sin 2t\,\mathrm{d}t = 6a.$$

```
> restart:
> with(VectorCalculus):assume(a>0);
> PathInt(1,[x,y]=Path(<a*(cos(t))^3,a*(sin(t))^3>,t=0..2*Pi));
```

Задача 47. Дадена е материална отсечка, свързваща точка $M(1, 0)$ с точка $N(2, 3)$. Плътността във всяка точка е равна на $x^2 + y^2$. Да се намерят координатите на центъра на тежестта на отсечката.

Решение: Кривата е равнинна. Използват се формули (4.1.5) в двумерния случай. Параметричните уравнения на отсечката са:

$$MN \equiv \{x = 1 + t,\ y = 3t,\ | \, t \in [0, 1]\},$$

линейният елемент в тзи случай е

$$\mathrm{d}l = \sqrt{(1+t)'^2 + (3t)'^2}\,\mathrm{d}t = \sqrt{10}.$$

Масата на материалната отсечка е

$$m = \int\limits_0^1 (1 + 2t + t^2 + 9t^2)\sqrt{10}\,\mathrm{d}t = \frac{16\sqrt{10}}{3}.$$

Пресмятат се моментите от първи ред:

$$\int\limits_0^1 (1+t)(1 + 2t + t^2 + 9t^2)\sqrt{10}\,\mathrm{d}t = 9\sqrt{10},$$

$$\int\limits_0^1 3t(1 + 2t + t^2 + 9t^2)\sqrt{10}\,\mathrm{d}t = 11\sqrt{10},$$

откъдето се получават координатите на центъра на тежестта:

$$x_G = \frac{27\sqrt{10}}{16\sqrt{10}} = \frac{27}{16},$$

$$y_G = \frac{33\sqrt{10}}{16\sqrt{10}} = \frac{33}{16}.$$

4.2 Криволинейни интеграли от втори род

Нека функциите $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$ и $R(x,y,z)$ са дефинирани върху гладката крива Γ с начална точка A и крайна точка B. Кривата се разделя на дъгички с помощта на точките $A \equiv A_0, A_1, \ldots, A_n \equiv B$, $A_i(x_i, y_i, z_i)$, и върху всяка дъгичка произволно се избира точка $M_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$, в която се пресмятат стойностите $P(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$, $Q(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$, $R(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$ на функциите P, Q, R. Дължината на дъгичката се означава с Δl_i. Използват се и означенията: $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \Delta y_i = y_i - y_{i-1}, \Delta z_i = z_i - z_{i-1}$, $i = 1, 2, \cdots, n$.

Дефиниция 4.2.1. Ако съществува границата на интегралната сума

$$\sum_{i=1}^{n} \left(P(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta x_i + Q(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta y_i + R(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta z_i\right)$$

при максимална дължина на дъгичките на деление клоняща към нула, то границата на тази сума се нарича *криволинеен интеграл от втори род* от векторната функция $\mathbf{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\mathbf{i} + Q(x,y,z)\mathbf{j} + R(x,y,z)\mathbf{k}$ върху кривата Γ. Означава се

$$\int\limits_{\Gamma} P(x,y,z)\,\mathrm{d}x + Q(x,y,z)\,\mathrm{d}y + R(x,y,z)\,\mathrm{d}z \tag{4.2.1}$$

и се пише

$$\int\limits_{\Gamma} P(x,y,z)\,\mathrm{d}x + Q(x,y,z)\,\mathrm{d}y + R(x,y,z)\,\mathrm{d}z =$$

$$\lim_{max\Delta l_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \left(P(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta x_i + Q(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta y_i + R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta z_i\right).$$

Ако кривата е в параметричен вид (4.1.1), то криволинейният интеграл се пресмята чрез определен интеграл съгласно формулата

$$\int\limits_{\Gamma} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}z = \int\limits_{t1}^{t2} \left\{\overline{P}\varphi' + \overline{Q}\psi' + \overline{R}\chi'\right\}\,\mathrm{d}t, \tag{4.2.2}$$

където

$$\overline{P}(t) = P\left[\varphi(t),\psi(t),\chi(t)\right], \overline{Q}(t) = Q\left[\varphi(t),\psi(t),\chi(t)\right],$$
$$\overline{R}(t) = P\left[\varphi(t),\psi(t),\chi(t)\right].$$

При смяна на посоката на обхождане на кривата, по която се интегрира, знакът на криволинейния интеграл се променя, т.е.

$$\int\limits_{\Gamma} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}z = -\int\limits_{\Gamma^-} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}z \tag{4.2.3}$$

Физическият смисъл на криволинеен интеграл от втори род е работата, която силата

$$\mathbf{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\mathbf{i} + Q(x,y,z)\mathbf{j} + R(x,y,z)\mathbf{k}$$

извършва за преместване по криволинеен път от началната до крайната му точка.

Криволинейният интеграл от втори род по затворена крива се означава

$$\oint\limits_{\Gamma} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}z.$$

Ако подинтегралната функция е пълен диференциал, т. е. съществува еднозначна и диференцируема функция U в едносвързано множество D, в която (условието за едносвързаност е съществено и не може да се пропуска)

$$\frac{\partial U}{\partial x} = P,\ \frac{\partial U}{\partial y} = Q,\ \frac{\partial U}{\partial z} = R, \tag{4.2.4}$$

то стойността на (4.2.1) не зависи от пътя на интегриране, а само от началната и крайната точка на интегриране. Ако кривата, по която се интегрира, е затворена, то стойността на криволинейния интеграл при изпълнени условия (4.2.4) е нула. Необходимите и достатъчни условия за съществуване на пълен диференциал $P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}z$ са:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}, \quad \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}. \tag{4.2.5}$$

Условията (4.2.5) се наричат условия за интегруемост.

Нека D е равнинно множество с частично гладка граница. Предполагаме, че функциите $P(x,y), Q(x,y), \dfrac{\partial P}{\partial y}$ и $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ са непрекъснати в затвореното множество $\overline{D}$. Тогава е в сила *формулата на Грийн-Гаус*:

$$\oint\limits_{\Gamma} P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y = \iint\limits_{D} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y. \tag{4.2.6}$$

От (4.2.6) следва формула за пресмятане на лице на равнинно множество D, чиято граница Γ е проста затворена крива:

$$\sigma = \frac{1}{2}\oint\limits_{\Gamma} x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x. \tag{4.2.7}$$

От (4.2.7) пък в случай на полярни координати $\rho = \rho(\varphi)$ се получава

$$\sigma = \frac{1}{2}\oint\limits_{\Gamma} \rho^2\,\mathrm{d}\varphi. \tag{4.2.8}$$

Криволинейни интеграли от втори род се пресмятат с $LineInt$ в библиотека $VectorCalculus$.

Задача 48. Да се пресметне криволинейният интеграл

$$I = \int\limits_{\Gamma} y\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y + (x+y+z)\,\mathrm{d}z$$

върху витловата линия

$$C \equiv \left\{ x = a\cos t,\ y = a\sin t,\ z = \frac{h}{2\pi}t \mid \quad t \in [0, 2\pi] \right\},\ a > 0,\ h > 0.$$

Решение: Прилага се формула (4.2.2), която в случая води до следните пресмятания:

$$I = \int\limits_0^{2\pi} \left[a\sin t(-a\sin t) - a\cos t(a\cos t) + \left(a\cos t + a\sin t + \frac{h}{2\pi}t \right) \frac{h}{2\pi} \right] \mathrm{d}t =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} \left(-a^2 + \frac{ha}{2\pi}\cos t + \frac{ha}{2\pi}\sin t + \frac{h^2}{4\pi^2}t \right) \mathrm{d}t = -2\pi a^2 + \frac{h^2}{2}.$$

Ето пресмятанията в рамките на библиотека $VectorCalculus$, да се сравнят резултатите.

```
> restart:
> with(VectorCalculus):
> VectorCalculus[`*`](SetCoordinates('cartesian'[x, y, z]), t);
> assume(a>0,h>0);
> LineInt(VectorField(<y, -x, x+y+z>),
  Path(<a*cos(t),a*sin(t),h/(2*Pi)*t>,t=0..2*Pi));
```

Задача 49. Да се пресметне криволинейният интеграл

$$I = \int\limits_{\Gamma} xy\,\mathrm{d}x + (x+y)\,\mathrm{d}y$$

върху параболата $x = y^2$ от точка $O(0,0)$ до точка $M(4,2)$. Да се сравнят резултатите с получените с $LineInt$ в библиотека $VectorCalculus$.

Решение: Равнинната крива е зададена с явна функция и за параметър е естествено да се вземе едната от променливите, нека в този случай това е y:

$$I = \Gamma \equiv \left\{x = t^2,\ y = t, \,|\, t \in [0,2]\right\}$$

Прилага се формула (4.2.2), която в случая води до следните пресмятания:

$$I = \int\limits_0^2 \left(t^2 t2t + t^2 + t\right)\,\mathrm{d}t = \frac{262}{15}.$$

```
> restart:
> int(2*t**4+t**2+t,t=0..2);
> with(VectorCalculus):
> SetCoordinates(cartesian[x, y]);
> LineInt(VectorField(<x*y, x+y>),
  Path(<t^2,t>,t=0..2));
```

Задача 50. Да се пресметне криволинейният интеграл

$$I = \int\limits_\Gamma (3x - y)\,\mathrm{d}x + (y - x)\,\mathrm{d}y$$

върху затворената начупена линия $ABCA$ с върхове точка $A(0,0)$, точка $B(1,0)$ и точка $C(0,2)$ чрез с $LineInt$ в библиотека $VectorCalculus$.

Решение:

```
> restart:
> with(VectorCalculus):
> SetCoordinates(cartesian[x, y]);
> LineInt(VectorField(<3*x-y, y-x>),
 LineSegments(<0,0>,<1,0>,<0,2>,<0,0>));
```

Същият резултат се получава след прилагане на (4.2.6):

$$I = \iint\limits_D \left(\frac{\partial(3x-y)}{\partial y} - \frac{\partial(y-x)}{\partial x}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 0.$$

Задача 51. С помощта на криволинеен интеграл пресметнете лицето на елипсата

$$C \equiv \{x = a\cos t,\ y = b\sin t, \,|\, t \in [0, 2\pi]\}\,,\ a > 0,\ b > 0.$$

Решение: Прилага се формула (4.2.7) и се получава следният интеграл:

$$\sigma = \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} (a\cos t b\cos t - b\sin t(-a\sin t))\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}ab\int\limits_0^{2\pi} \mathrm{d}t = ab\pi.$$

Същият резултат се получава с *LineInt*:

```
> restart:
> with(VectorCalculus):
> SetCoordinates(cartesian[x, y]);
> assume(a>0,b>0);
> 1/2* LineInt(VectorField(<-y, x>),
 Ellipse(<0,0>,a,b,2*Pi));
```

Задача 52. С помощта на криволинеен интеграл да се пресметне лицето на една навивка на спиралата на Архимед:

$$C \equiv \{\rho = a\varphi, \,|\, \varphi \in [0, 2\pi]\}\,,\ a > 0.$$

Решение: Прилага се формула (4.2.8) и се получава следният резултат:

$$\sigma = \frac{1}{2}\oint\limits_C \rho^2\,\mathrm{d}\varphi = \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} a^2\varphi^2 = \frac{a^2}{2} \times \left.\frac{\varphi^3}{3}\right|_0^{2\pi}\,\mathrm{d}\varphi = \frac{4a^2\pi^3}{3}.$$

4.3 Повърхнинни интеграли от първи род

Нека S е частично гладка двустранна повърхнина и функцията $f(x, y, z)$ е дефинирана и ограничена върху нея. Повърхнината се разделя на части S_i, които имат общи точки евентуално по границите си и имащи лица σ_i. Върху всяка част се избира произволна точка $M_i(x_i, y_i, z_i)$, в която се пресмята стойността на функцията $f(x_i, y_i, z_i)$.

Дефиниция 4.3.1. Ако сумата $\sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\sigma_i$ има крайна граница при максимална площ σ_i клоняща към нула, казваме че *повърхнинният интеграл от първи род* от $f(x, y, z)$ върху S съществува и пишем

$$\iint\limits_S f(x, y, z)\,\mathrm{d}\sigma = \lim_{max\sigma_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\sigma_i.$$

Ако повърхнината S е зададена с векторно-параметрично уравнение

$$\mathbf{r}(x, y, z) = x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j} + z(u, v)\mathbf{k},\ (u, v) \in D \subset \mathbb{R}^2,$$

то

$$\iint\limits_S f(x, y, z)\,\mathrm{d}\sigma = \iint\limits_D f(x(u, v), y(u, v), z(u, v))\sqrt{EG - F^2}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v, \quad (4.3.1)$$

където E, F, G са Гаусовите коефициенти (3.1.8) на повърхнината.

Ако повърхнината е зададена чрез явна функция $z = z(x, y)$, то независимите променливи могат да играят ролята на параметри и тогава

$$EG - F^2 = 1 + \left(z'_x\right)^2 + \left(z'_y\right)^2$$

и формула (4.3.1) приема вида:

$$\iint\limits_S f(x, y, z)\,\mathrm{d}\sigma = \iint\limits_D f(x, y, z(x, y))\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \quad (4.3.2)$$

Лицето σ на повърхнината S може да се пресметне чрез повърхнинния интеграл

$$\sigma = \iint\limits_S \mathrm{d}\sigma. \quad (4.3.3)$$

Масата на материална повърхнина S с плътност $\rho(x, y, z)$ се пресмята чрез

$$M = \iint\limits_S \rho(x, y, z)\,\mathrm{d}\sigma, \quad (4.3.4)$$

а координатите на центъра на тежестта – чрез формулите:

$$x_G = \frac{\iint\limits_S x\rho(x, y, z)\,\mathrm{d}\sigma}{\iint\limits_S \rho(x, y, z)\,\mathrm{d}\sigma},\ y_G = \frac{\iint\limits_S y\rho(x, y, z)\,\mathrm{d}\sigma}{\iint\limits_S \rho(x, y, z)\,\mathrm{d}\sigma},\ z_G = \frac{\iint\limits_S z\rho(x, y, z)\,\mathrm{d}\sigma}{\iint\limits_S \rho(x, y, z)\,\mathrm{d}\sigma}. \quad (4.3.5)$$

Повърхнинни интеграли от първи род се пресмятат със $SurfaceInt$ в библиотека $VectorCalculus$.

Задача 53. Да се пресметне интегралът по повърхнина от първи род $I = \iint\limits_S z\mathrm{d}\sigma$, където S е полусферата $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $a > 0, z \geq 0$.

Решение: В случая повърхнината, по която се интегрира, се задава с явната функция $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$, ето защо за параметри се приемат независимите променливи и се прилага формула (4.3.2). Получава се последователно:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}, \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-y}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}, D \equiv x^2 + y^2 \leq a^2.$$

$$I = \iint\limits_S z\,\mathrm{d}\sigma = \iint\limits_D \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2 - x^2 - y^2} + \frac{y^2}{a^2 - x^2 - y^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y =$$

$$= a \iint\limits_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \pi a^3.$$

Задача 54. Да се пресметне интегралът по повърхнина от първи род

$$I = \oiint\limits_S (x^2 + y^2) d\sigma,$$

където S е сферата $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $a > 0$.

Решение: Векторно-параметричното уравнение на сферата в сферични координати е

$$S \equiv \mathbf{r} = a \sin\vartheta \cos\varphi \mathbf{i} + a \sin\vartheta \sin\varphi \mathbf{j} + a \cos\vartheta \mathbf{k},$$

$$D \equiv \{(\varphi, \vartheta) \,|\, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq \vartheta \leq \pi\}.$$

Пресмятат се:

$$\mathbf{r}'_\varphi = -a \sin\vartheta \sin\varphi \mathbf{i} + a \sin\vartheta \cos\varphi \mathbf{j} + 0\mathbf{k},$$

$$\mathbf{r}'_\vartheta = a \cos\vartheta \cos\varphi \mathbf{i} + a \cos\vartheta \sin\varphi \mathbf{j} - a \sin\vartheta \mathbf{k},$$

и Гаусовите коефициенти

$$E = a^2 \sin^2\vartheta \sin^2\varphi + a^2 \sin^2\theta \cos^2\varphi = a^2 \sin^2\theta,$$

$$F = -a^2 \sin\theta \cos\theta \sin\varphi \cos\varphi + a^2 \sin\theta \cos\theta \sin\varphi \cos\varphi + 0 = 0,$$

$$G = a^2\cos^2\vartheta\cos^2\varphi + a^2\cos^2\theta\sin^2\varphi + a^2\sin^2\vartheta = a^2.$$

Прилага се формула (4.3.1) и се получава за пресмятане двоен интеграл:

$$I = \iint\limits_D a^2\sin^2\vartheta\sqrt{a^4\sin^2\vartheta - 0^2}\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\vartheta = a^4\iint\limits_D \sin^3\vartheta\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\vartheta =$$

$$a^4\int\limits_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi \times \int\limits_0^{\pi}(1-\cos^2\vartheta)\sin\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta = -2\pi a^4\int\limits_0^{\pi}(1-\cos^2\vartheta)\,\mathrm{d}\cos\vartheta = \frac{8\pi a^4}{3}.$$

Пресмятанията могат да се направят с

```
> restart; with(VectorCalculus):
> SurfaceInt((x^2+y^2),[x,y,z]=Sphere(<0,0,0>,a));
```

Задача 55. Да се намери лицето на частта от повърхнината $z = xy$, която е във вътрешността на цилиндъра $x^2 + y^2 = 1$.

Решение: Използва се (4.3.3):

$$s = \iint\limits_S \mathrm{d}\sigma = \iint\limits_{x^2+y^2\le 1}\sqrt{1+x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

В полярни координати

$$x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,\ J = r,$$

$$s = \iint\limits_D r\sqrt{1+r^2}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi,\ D \equiv \{0 \le r \le 1,\ 0 \le \varphi \le 2\pi\},$$

$$s = \int\limits_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi \times \int\limits_0^1 r\sqrt{1+r^2}\,\mathrm{d}r = 2\pi \times \frac{1}{2}\int\limits_0^1\sqrt{1+r^2}\,\mathrm{d}r^2 = \pi\left.\frac{\left(1+r^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right|_0^1,$$

$$s = \frac{2\pi}{3}\left(2\sqrt{2}-1\right).$$

4.4 Повърхнинни интеграли от втори род

Нека S е гладка двустранна повърхнина,

$$\mathbf{n}(x,y,z) = \cos\alpha\mathbf{i} + \cos\beta\mathbf{j} + \cos\gamma\mathbf{k}$$

е единичен нормален вектор към нея (който определя едната от двете страни на повърхнината) и

$$\mathbf{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\mathbf{i} + Q(x,y,z)\mathbf{j} + R(x,y,z)\mathbf{k}$$

е векторна функция, дефинирана и ограничена върху S. Проекцията на вектора $\mathbf{F}$ върху нормалата към повърхнината S е

$$F_n = \mathbf{F}(x,y,z).\mathbf{n}(x,y,z) = P(x,y,z)\cos\alpha + Q(x,y,z)\cos\beta + R(x,y,z)\cos\gamma.$$

Дефиниция 4.4.1. Интегралът по повърхнина от първи род

$$\iint\limits_S \left(P(x,y,z)\cos\alpha + Q(x,y,z)\cos\beta + R(x,y,z)\cos\gamma\right)\,\mathrm{d}\sigma$$

се нарича *интеграл по повърхнина от втори род* от векторната функция $\mathbf{F}$ по определената страна от повърхнината S и се пише

$$\iint\limits_S P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint\limits_S \left(P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma\right)\,\mathrm{d}\sigma \tag{4.4.1}$$

Ако се проектира по нормалата на другата страна на повърхнината S, интегралът по повърхнина ще смени знака си.

Означаваме

$$I \equiv \iint\limits_S P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + R\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Ако гладката повърхнината S е зададена с векторно параметрично уравнение

$$\mathbf{r}(x,y,z) = x(u,v)\mathbf{i} + y(u,v)\mathbf{j} + z(u,v)\mathbf{k},\ (u,v) \in D \subset \mathbb{R}^2,$$

и векторната функция $\mathbf{F}$ е дефинирана и ограничена върху S, то повърхнинният интеграл от втори род се пресмята чрез двоен интеграл:

$$I = \iint\limits_D (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\sqrt{EG - F^2}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v \tag{4.4.2}$$

Нормалният вектор $\mathbf{N}(A, B, C)$ към векторно-параметрично зададена повърхнина се получава като векторно произведение на два тангенциални към повърхнината вектори,

$$\mathbf{N}(A, B, C) = \mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{vmatrix}.$$

Тъй като

$$EG - F^2 = A^2 + B^2 + C^2,$$

то

$$I = \iint\limits_D (PA + QB + RC)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v. \tag{4.4.3}$$

Ако гладката (частично гладката) крива е зададена с уравнението $z = z(x, y)$, $(x, y) \in D$, формулата за пресмятане на криволинеен интеграл от втори род (4.4.2) добива вида

$$I = \iint\limits_D (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, \tag{4.4.4}$$

а формула (4.4.3) съответно

$$I = \iint\limits_D \left\{-P\left[x, y, z\left(x, y\right)\right]\frac{\partial z}{\partial x} - Q\left[x, y, z\left(x, y\right)\right]\frac{\partial z}{\partial y} + R\left[x, y, z\left(x, y\right)\right]\right\}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y. \tag{4.4.5}$$

В случай, че повърхнината е зададена чрез уравнението

$$F(x, y, z) = 0,\ (x, y) \in D,$$

вземайки предвид изразите за частните производни на $z(x, y)$, се получава следната формула:

$$I = \iint\limits_{D} \left(PF'_x + QF'_y + RF'_z\right) \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{F'_z}. \tag{4.4.6}$$

Формулата на *Гаус-Остроградски* дава връзка между повърхнинен интеграл от втори род и троен интеграл в случай на гладка (частично гладка) затворена повърхнина S, която е граница на множеството $V \subset \mathbb{R}^3$ и непрекъснатост на функциите:

$$P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z), \frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial y}, \frac{\partial R}{\partial z}:$$

$$\oiint\limits_{S} P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iiint\limits_{V} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \tag{4.4.7}$$

Връзка между криволинеен интеграл от втори род и повърхнинен интеграл от втори род се дава от формулата на Стокс. Нека Γ е частично гладка затворена крива в $\mathbb{R}^3$ и функциите $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z), R(x,y,z)$ заедно с първите си частни производни са непрекъснати. Тогава е в сила *формулата на Стокс*

$$\begin{aligned} \oint\limits_{\Gamma} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}z &= \iint\limits_{S} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) \mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \\ &+ \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) \mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, \end{aligned} \tag{4.4.8}$$

където S е произволна двукратно гладка двустранна повърхнина, опъната на кривата Γ.

Физическият смисъл на повърхнинен интеграл от втори род е количеството флуид, което преминава през повърхнината S за единица време в пространство, запълнено с флуид.

Повърхнинни интеграли от втори род се пресмятат с $Flux$ в библиотека $VectorCalculus$.

Задача 56. Да се пресметне $\iint\limits_{S} \frac{\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{x} + \frac{\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x}{y} + \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{z}$ по горната страна на елипсоида $\quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad a > 0,\ b > 0,\ c > 0,\ z \geq 0.$

Решение: Векторно-параметрично уравнение на повърхнината, върху която се интегрира, се получава като за парамери се приемат независимите променливи x и y. Тогава

$$S \equiv \mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}\,\mathbf{k},$$

$$\mathbf{r}'_x = \mathbf{i} + c\frac{-x}{a^2\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}}\,\mathbf{k},\ \mathbf{r}'_y = \mathbf{j} + c\frac{-y}{b^2\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}}\,\mathbf{k},$$

$$\mathbf{N}\,(A, B, C) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & c\dfrac{-x}{a^2\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}} \\ 0 & 1 & c\dfrac{-y}{b^2\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}} \end{vmatrix},$$

$$\mathbf{N}\,(A, B, C) = \frac{cx}{a^2\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}}\mathbf{i} + \frac{cy}{b^2\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}}\mathbf{j} + \mathbf{k}.$$

Използва се (4.4.3).

$$I = \iint\limits_D \left[\frac{1}{x}\frac{cx}{a^2\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}} + \frac{1}{y}\frac{cy}{b^2\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}} + \frac{1}{z}\right]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y =$$

$$\iint\limits_D \left[\frac{c}{a^2\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}} + \frac{c}{b^2\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}} + \frac{c}{c^2\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}}\right]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y =$$

$$= c\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right)\iint\limits_D \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}},$$

където $D \equiv \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \le 1$. В обобщена полярна координатна система

$$x = ar\cos\varphi,\ y = br\sin\varphi,\ J = abr,$$

образът на D е $\overline{D} \equiv \left\{ \begin{array}{c} 0 \le r \le 1 \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \end{array} \right\}$, а двойният интеграл е

$$I = c\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right) \int\limits_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int\limits_0^1 \frac{abr}{\sqrt{1-r^2}}\,\mathrm{d}r$$

и крайният резултат е

$$I = \frac{2\pi}{abc}\left(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2\right).$$

```
restart;with(VectorCalculus):assume(a>0,b>0,c>0);
Flux(VectorField(<1/x,1/y,1/z>,cartesian[x,y,z]),
Surface(<a*sin(s)*cos(t),b*sin(s)*sin(t),c*cos(s)>,
s=0..Pi/2,t=0..2*Pi));
```

Задача 57. Да се пресметне

$$\oiint\limits_S x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

по външната страна на крайния обем, получен при пресичането на равнината $z = 1$ и ротационния параболоид $z = x^2 + y^2$.

Решение: Интегрирането се извършва по частично гладка повърхнина S, която е обединение от затворен централен единичен кръг $x^2 + y^2 = 1$ в равнината $z = 1$, означава се S_1, и част от параболоида $z = x^2 + y^2$, $z \leqslant 1$, означава се S_2. Имаме:

$$S_1 \equiv \mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + \mathbf{k},\ D \equiv x^2 + y^2 \le 1,$$

$$\mathbf{N} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \mathbf{k},\ I_1 = \iint\limits_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \pi.$$

В цилиндрични координати

$$S_2 \equiv \mathbf{r} = r\cos\varphi\mathbf{i} + r\sin\varphi\mathbf{j} + r^2\mathbf{k},\ D \equiv \{0 \le r \le 1,\ 0 \le \varphi \le 2\pi\},$$

$$\mathbf{N} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \cos\varphi & \sin\varphi & 2r \\ -r\sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \end{vmatrix} = -2r^2\cos\varphi\mathbf{i} - 2r^2\sin\varphi\mathbf{j} + r\mathbf{k}.$$

Тъй като третата координата на външната за повърхнината нормала е отрицателна, за външна нормала се приема $-\mathbf{N}$. От (4.4.3) се получава следният двоен интеграл:

$$I_2 = \iint\limits_D \left[r\cos\varphi\left(2r^2\cos\varphi\right) + r\sin\varphi\left(2r^2\sin\varphi\right) - r^3\right]\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi =$$

$$\iint\limits_D r^3\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi = 2\pi\left.\frac{r^4}{4}\right|_0^1 = \frac{\pi}{2}.$$

$$I = I_1 + I_2 = \pi + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}.$$

С формулата на Гаус-Остроградски (4.4.7) се получава

$$I = 3\iiint\limits_V \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,\; V \equiv \left\{z \le 1, z \ge x^2 + y^2\right\}.$$

В цилиндрични координати

$$I = 3\int\limits_0^1\int\limits_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int\limits_{r^2}^1 r\,\mathrm{d}z = 6\pi\int\limits_0^1 r\left(1 - r^2\right)\,\mathrm{d}r = 6\pi\left.\left(\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4}\right)\right|_0^1 = \frac{3\pi}{2}.$$

4.5 Задачи и отговори

1. Да се пресметне $I = \oint\limits_\Gamma (x+y)ds$, където Γ е затворената начупена линия $OABO$, $O(0,0)$, $A(1,0)$, $B(0,1)$. $I = 1 + \sqrt{2}$

2. Да се пресметне $I = \oint\limits_C \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}s$, където

$$C \equiv \{x = a\left(\cos t + t\sin t\right), y = a\left(\sin t - t\cos t\right), 0 \le t \le 2\pi\}.$$

$$I = \frac{a^2}{3}\left[\left(1 + 4\pi^2\right)^{\frac{3}{2}} - 1\right].$$

3. Да се пресметне $I = \int\limits_\Gamma \frac{\mathrm{d}s}{x+y}$, ако интегрирането е извършено по отреза от правата, свързващ точките $A\left(2,4\right)$ и $B\left(1,3\right)$. $I = \frac{\sqrt{2}}{2}\ln 2.$

4. Да се пресметне чрез криволинеен интеграл от първи род лицето на цилиндричната повърхнина $y^2 = \frac{4}{9}(x-1)^3$, ограничена отдолу от равнината $z = 0$, а отгоре от повърхнината $z = 2 - \sqrt{x}$. $\frac{11}{3}$

5. Да се намери стойността на $\int\limits_C \left(x^2 + y^2 + z^2\right)\,\mathrm{d}s$, където C е част от винтовата линия с параметрични уравнения: $x = a\cos t, y = a\sin t$, $z = bt$, $0 \le t \le 2\pi$, $a > 0, b > 0$. $\frac{2\pi}{3}\left(3a^2 + 4\pi^2 b^2 \sqrt{a^2+b^2}\right)$.

6. Да се пресметне
$$\oint\limits_C \left(x^2 - y^2\right)\,\mathrm{d}x + \left(x^2 + y^2\right)\,\mathrm{d}y$$
в положителна посока на описване на елипсата $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b} = 1$, започвайки от точка $A(a, 0)$, $a > 0, b > 0$. $\pi(a^2 - b^2)$.

7. Да се покаже, че ако пътят на интегриране не пресича ординатната ос, то интегралът $\int\limits_{(2,1)}^{(1,2)} \frac{y\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y}{x^2}$ не зависи от пътя на интегриране, и да се пресметне. $-\frac{3}{2}$.

8. Да се пресметне $\iint\limits_S z\,\mathrm{d}\sigma$, където S е полусферата $x^2+y^2+z^2 = a^2$, $z \ge 0$. πa^3.

9. Да се пресметне $\iint\limits_S (xy + yz + zx)\,\mathrm{d}\sigma$, където S е частта от конуса $z = \sqrt{x^2+y^2}$, изрязана от цилиндъра $x^2 + y^2 = 2ax, a > 0$. $\frac{64\sqrt{2}}{15}a^4$.

10. Да се пресметне
$$\oiint\limits_S xy\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + yz\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + xz\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$
ако S е външната страна на пирамида, ограничена от равнините $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y + z = 1$ $\frac{1}{8}$.

Глава 5

Векторен анализ

5.1 Скаларни и векторни полета. Диференциални оператори

С $\mathbb{R}^n$ означаваме n-мерно векторно пространство, чиито елементи са наредени n-торки от реални числа, наречени n-мерни вектори. Разглеждаме векторни пространства за $n = 1, 2, 3$, с дефинирани операции: умножение на вектор с реално число, събиране на вектори, скаларно и векторно умножение на вектори.

Дефиниция 5.1.1. Ако на всяка точка $M(x, y, z) \in D \subset \mathbb{R}^3$ е съпоставена функция $U(M) \equiv U(x, y, z)$ на координатите на точка $M(x, y, z)$, чиито стойности са реални числа, то казваме, че е зададено *скаларно поле*.

Примери за скаларни полета са температурата във всяка точка на дадено тяло, налягането във всяка точка от атмосферата на земята, плътността във всяка точка на двумерна материална пластина (хомогенна или нехомогенна) и т.н.

Геометрична характеристика на скаларно поле са повърхнините (линиите) на ниво.

Дефиниция 5.1.2. Множеството от всички точки $M \in D$, такива че $U(M) = const$, се нарича *повърхнина на ниво*, ако $D \subset \mathbb{R}^3$, или *линия на ниво*, ако $D \subset \mathbb{R}^2$.

Дефиниция 5.1.3. Нека в $\mathbb{R}^3$ е въведена Декартова координатна система с начало точка O и единични вектори $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$. Ако на всяка точка $M \in D \subset \mathbb{R}^3$ е съпоставен вектор $\mathbf{V}(M) \subset \mathbb{R}^3$, чиито координати са функции на координатите на точка M, то казваме, че е зададено *векторно поле*.

Едно векторно поле е напълно дефинирано, ако са известни три функции:

$$P(x, y, z),\ Q(x, y, z),\ R(x, y, z),$$

даващи координатите на $\mathbf{V}(M)$ в зависимост от координатите на точка $M(x, y, z)$. Ще употребяваме записа

$$\mathbf{V}(M) \equiv P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}. \tag{5.1.1}$$

Чрез векторно поле може да се опише скоростта на водата във всяка точка от океана в даден момент от време и изобщо скоростта на изменение на едно скаларно поле.

Геометрична характеристика на векторно поле са неговите векторни линии.

Дефиниция 5.1.4. Гладка крива, във всяка точка на която направлението на допирателната съвпада с направлението на вектора на полето в тази точка, се нарича *векторна линия.*

Векторните линии удовлетворяват следните уравнения:

$$\frac{\mathrm{d}x}{P(x, y, z)} = \frac{\mathrm{d}y}{Q(x, y, z)} = \frac{\mathrm{d}z}{R(x, y, z)}. \tag{5.1.2}$$

Въпросът с размерността на дефиниционното множество на скаларно или векторно поле и размерността на множеството от стойностите на едно векторно поле е несъществен и има значение само за графичното представяне на полетата. При размерности, по-големи от 3, може да се прави графично представяне на профили.

Да дефинираме някои диференциални оператори, които заедно с понятията скаларно, векторно и смесено произведение на вектори позволяват компактен запис на свойства и теореми, отнасящи се за скаларни и векторни полета.

Дефиниция 5.1.5. *Градиент* на скаларно поле $U = f(x, y, z)$, където функцията $f(x, y, z)$ има (непрекъснати) частни производни относно трите променливи x, y, z, се нарича векторното поле

$$\mathbf{grad}U(M) = \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial z}\mathbf{k}. \tag{5.1.3}$$

От дефиницията на понятието градиент следват свойствата: нека $U_1(M)$ и $U_2(M)$ са две скаларни полета и α_1 и α_2 - две реални числа, тогава

$$\mathbf{grad}\left(\alpha_1 U_1(M) + \alpha_2 U_2(M)\right) = \alpha_1 \mathbf{grad} U_1(M) + \alpha_2 \mathbf{grad} U_2(M)$$

и

$$\mathbf{grad}\,(U_1(M)U_2(M)) = U_1(M)\mathbf{grad}U_2(M) + U_2(M)\mathbf{grad}U_1(M).$$

Дефиниция 5.1.6. Ако съществува крайната граница $\lim\limits_{\Delta l\to 0}\dfrac{\Delta U}{\Delta \mathbf{l}}$, където $\mathbf{l}$ е дадена посока, $\Delta U = U(M) - U(M_0)$ при M_0 фиксирана точка от D и $\overrightarrow{M_0M} \parallel \mathbf{l}$, то казваме, че полето $U(M)$ притежава *производна по посока* $\mathbf{l}$ в точката M_0 и пишем

$$\left.\frac{\partial U}{\partial \mathbf{l}}\right|_{M_0} = \lim_{\Delta l\to 0}\frac{\Delta U}{\Delta \mathbf{l}}. \tag{5.1.4}$$

Понятието производна по посока в точка на скаларно поле е инвариантно по отношение на координатната система. В Декартова координатна система изразяваме производната по посока чрез скаларното произведение на градиента на полето в точката M_0 и единичния вектор на посоката:

$$\left.\frac{\partial U}{\partial \mathbf{l}}\right|_{M_0} = \mathbf{grad}U(M_0)\frac{\mathbf{l}}{|\,\mathbf{l}\,|}. \tag{5.1.5}$$

Последната формула показва, че градиентът на едно скаларно поле в дадена точка има посоката, по която скаларното поле нараства най-бързо.

Дефиниция 5.1.7. *Дивергенция* на векторното поле $\mathbf{V}(M) = P(x,y,z)\mathbf{i}+Q(x,y,z)\mathbf{j}+R(x,y,z)\mathbf{k}$ е скаларното поле $div\mathbf{V}(M)$, където

$$div\mathbf{V}(M) = \frac{\partial P(x,y,z)}{\partial x} + \frac{\partial Q(x,y,z)}{\partial y} + \frac{\partial R(x,y,z)}{\partial z}. \tag{5.1.6}$$

Дивергенцията на едно векторно поле може да се представи по следния начин с помощта на скаларно произведение:

$$div\mathbf{V} = \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial z}\mathbf{k}. \tag{5.1.7}$$

Дефиниция 5.1.8. Точките, в които дивергенцията е положителна, се наричат *източници*, а точките, в които дивергенцията е отрицателна, се наричат *консуматори*.

Дефиниция 5.1.9. Ако във всички точки от едно векторно поле дивергенцията е нула, то полето се нарича *соленоидално (тръбно)*.

Дефиниция 5.1.10. *Ротор* на векторното поле $\mathbf{V}(M)$ е векторното поле $\mathbf{rot}\mathbf{V}(M)$, където

$$\mathbf{rot}\mathbf{V}(M) = \left(\frac{\partial R(x,y,z)}{\partial y} - \frac{\partial Q(x,y,z)}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial P(x,y,z)}{\partial z} - \frac{\partial R(x,y,z)}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial Q(x,y,z)}{\partial x} - \frac{\partial P(x,y,z)}{\partial y}\right)\mathbf{k}. \quad (5.1.8)$$

Чрез векторно произведение роторът се представя по следния начин :

$$\mathbf{rot}\mathbf{V} = \mathbf{i}\times\frac{\partial\mathbf{V}}{\partial x} + \mathbf{j}\times\frac{\partial\mathbf{V}}{\partial y} + \mathbf{k}\times\frac{\partial\mathbf{V}}{\partial z}. \quad (5.1.9)$$

Удобен е и следният запис съгласно означения (5.1.1):

$$\mathbf{rot}\mathbf{V} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}. \quad (5.1.10)$$

Дефиниция 5.1.11. Векторни полета, за които роторът е равен на нулевия вектор, се наричат *безвихрови*.

Дефиниция 5.1.12. Векторно поле, за което роторът е равен на нулевия вектор и дивергенцията е равна на нула във всяка точка, се нарича *хармонично*.

Дефиниция 5.1.13. *Операторът на Хамилтон ("набла"оператор)* действа на скаларното или векторното поле, което е написано в дясно от ∇ и се дефинира по следния начин:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}. \quad (5.1.11)$$

С помощта на оператора на Хамилтон дивергенцията и градиентът се записват като скаларни произведения:

$$div\mathbf{V} = \nabla\,\mathbf{V},$$

$$\mathbf{grad}U = \nabla\,U,$$

а роторът - като векторно произведение:

$$\mathbf{rot}\mathbf{V} = \nabla\times\mathbf{V}.$$

Дефиниция 5.1.14. *Операторът на Лаплас* Δ се дефинира чрез следното равенство:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Той действа на написаното отдясно на Δ поле.

Добро упражнение за овладяване на въведените дефиниции е проверката (доказателството) на следните връзки между диференциалните оператори, което може да се проведе и с MAPLE:

1. $div\,[\mathbf{rot}\,(\mathbf{V})] = 0$ или записано като $\nabla\ \ (\nabla \times \mathbf{V}) = 0$.

```
>with(linalg):
> diverge(curl([f(x,y,z),g(x,y,z),h(x,y,z)],[x,y,z]),
  vector([x,y,z]));
```

2. $\mathbf{rot}\,[\mathbf{grad}\,(U)] = \overrightarrow{0}$ или записано като $\nabla \times (\nabla U) = \overrightarrow{0}$.

```
> curl(grad(U(x,y,z),vector([x,y,z])) ,[x,y,z]);
```

3. $div\,[\mathbf{grad}\,(U)] = \Delta U$ или записано като $\nabla^2 U = \Delta U$.

4. $div\,(U\mathbf{V}) = U\,div\,(\mathbf{V}) + \mathbf{grad}\,(U)\ \ \mathbf{V}$.

5. $\mathbf{rot}\,(U\mathbf{V}) = U\,\mathbf{rot}\,(\mathbf{V}) + \mathbf{grad}\,(U) \times \mathbf{V}$.

Важни са следните частни случаи, които имат ясен физически смисъл. Векторното поле $\mathbf{V}$ се поражда от потенциална функция, дефинирана с точност до адитивна константа, тогава и само тогава, когато то е безвихрово, т.е.

$$\mathbf{rot}\,(\mathbf{V}) = \mathbf{0} \Longleftrightarrow \mathbf{V} = \mathbf{grad}\,(U)\,.$$

Векторното поле $\mathbf{W}$ се поражда от потенциален вектор $\mathbf{U}$, дефиниран с точност до градиент, тогава и само тогава, когато дивергенцията му е нула, т.е.

$$div\mathbf{W} = 0 \Longleftrightarrow \mathbf{W} = \mathbf{rot}\,(\mathbf{U})\,.$$

Задача 58. Дадени са точките $A(3,1,1)$, $B(4,2,2)$, $C(9,3,-2)$ и $D(0,1,-1)$. Да се намерят ъгълът между векторите $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$, лицето на успоредник с носители тези вектори и обемът на пареллелепипед с носители векторите $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AD}$.

Решение: Намираме координатите на векторите $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (4,2,2) - (3,1,1) = (4-3, 2-1, 2-1),$$

$$\overrightarrow{AB} = (1,1,1),\ \overrightarrow{AC} = (6,2,-3),\ \overrightarrow{AD} = (-3,0,-2),$$

Скаларното произведение на векторите $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$, може да се намери, като се използва дефиницията на понятието скаларно произведение:

$$\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}|\,|\overrightarrow{AC}|\,\cos\varphi =$$

$$\sqrt{(1)^2+(1)^2+(1)^2}\,\sqrt{(6)^2+(2)^2+(-3)^2}\,\cos\varphi = 7\sqrt{3}\,\cos\varphi,$$

където φ е ъгълът между двата вектора. Същото скаларно произведение чрез координатите на двата вектора е

$$\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{AC} = (1)(6) + (1)(2) + (1)(-3) = 5.$$

От уравнението $5 = 7\sqrt{3}\,\cos\varphi$ се получава $\cos\varphi = \dfrac{5}{7\sqrt{3}}$ и окончателно $\varphi = \arccos\dfrac{5}{7\sqrt{3}} = 1,1457$ радиана.

Векторното произведение на векторите $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ е следният вектор:

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 6 & 2 & -3 \end{vmatrix} = (-5, 9, -4).$$

Дължината на получения вектор е мярката на лицето на успоредник с носители векторите $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$, т.е. $S = \sqrt{122}$.
За да пресметнем обема на парелелепипеда, намираме абсолютната стойност на смесеното произведение на векторите $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AD}$:

$$V = \left|\overrightarrow{AB}\overrightarrow{AC}\overrightarrow{AD}\right| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 6 & 2 & -3 \\ -3 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 23.$$

С помощта на $dotprod, crossprod, det$ и библиотека $linalg$ следващият код реализира решението:

```
> restart;
> with(linalg):
> ra:=[3,1,1];rb:=[4,2,2];rc:=[9,3,-2];rd:=[0,1,-1];
> ab := rb-ra;ac:=rc-ra;ad:=rd-ra;
> #
> sc:=dotprod(ab,ac);
> dab:=sqrt(dotprod(ab,ab)); dac:=sqrt(dotprod(ac,ac));
> cosabac:=sc/(dab*dac); arccos(cosabac);
> #
> vec:=crossprod(ab,ac);Sabc:=sqrt(dotprod(vec,vec));
> #
> Vabc:=abs(dotprod(vec,ad));
> #
> M1:=matrix(3,3,[[i ,j ,k],ab,ac]);
> vec:=det(M1);
> M2:=matrix(3,3,[ab,ac,ad]);
> smes:=det(M2);
```

Задача 59. Начертайте линиите на ниво за скаларното поле $u = x^2 - y^2$, върху които скаларното поле приема стойности $-1; 0; +1$.

Решение: Уравненията $x^2 - y^2 = -1$, $x^2 - y^2 = 0$, $x^2 - y^2 = 1$ дефинират три криви от втора степен, втората от които се разпада на две прави. За изчертаването на двете хиперболи и двете прави използваме *implicitplot3d* в рамките на библиотека *plots*.

```
> plots[implicitplot]([x^2-y^2=1, x^2-y^2=-1,x=y,x=-y],
   x=-Pi..Pi, y=-Pi..Pi, color=[blue,green,red,black],
   legend=[‘u=-1‘,‘u=1‘, ‘u=0‘,‘u=0‘]);
```

Задача 60. Изобразете повърхнините на ниво за скаларното поле $u = x^2 + y^2 - z^2$, върху които скаларното поле приема стойности $-1; 0; +1$.

Решение: Уравненията $x^2 + y^2 - z^2 = -1$, $x^2 + y^2 - z^2 = 0$, $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ дефинират три повърхнини от втора степен, които са графиките на трите неявни функции на две променливи, определени от същите уравнения. При $u = -1$ се получава двуповърхнинен ротационен хиперболоид. В случая $u = 0$ могат да се опишат явно двата клона на функцията, повърхнината е конус. При $u = 1$ се получава едноповърхнинен ротационен хиперболоид. За изчертаването се използват *plot3d*, *implicitplot3d* в рамките на библиотека *plots*.

```
> eq:=x^2+y^2-z^2=C;C:=-1;
implicitplot3d(eq,x=-3..3,y=-3..3,z=-3..3);
> C:=0;implicitplot3d(eq,x=-3..3,y=-3..3,z=-3..3);
> plot3d([sqrt(x^2+y^2),-sqrt(x^2+y^2)],x=-3..3,y=-3..3);
> C:=1;implicitplot3d(eq,x=-3..3,y=-3..3,z=-3..3);
```

Задача 61. Намерете производната на скаларното поле

$$u(x,y,z) = ln(x^2y + y^2z + z^2x)$$

в точката $M_0(0;1;1)$ по посока на елипсата $\{4x^2 + y^2 = 1, z = 1\}$.

Решение: Точката $M_0(0;1;1)$ лежи на елипсата Γ. Да намерим тангенциален вектор към елипсата с посока, обратна на часовниковата стрелка. Намираме параметрични уравнения на елипсата, например

$$\Gamma \equiv \left\{ x = \frac{1}{2}\cos t,\ y = \sin t,\ z = 1 \,|\, t \in [0,\ 2\pi) \right\}.$$

С точност до посока тангенциалният вектор в произволна точка от елипсата е

$$\mathbf{l} = \left(-\frac{1}{2}\sin t,\ \cos t,\ 0 \right).$$

Стойността на параметъра t_0, при която се получават координатите на точката M_0, е решение на следната система уравнения:

$$\left| \ \tfrac{1}{2}\cos t_0 = 0,\ \ \sin t_0 = 1,\ \ 1 = 1. \right.$$

Получаваме $t_0 = \dfrac{\pi}{2}$. Заместваме тази стойност в израза за тангенциалния вектор и получаваме вектора $\mathbf{l}(t_0) = \left(-\frac{1}{2},\ 0,\ 0\right)$, по посока на който ще търсим производната на скаларното поле. Да намерим градиента на полето в произволна точка:

$$\mathbf{grad} u = \left(\frac{2xy + z^2}{x^2y + y^2z + z^2x}, \frac{x^2 + 2yz}{x^2y + y^2z + z^2x}, \frac{y^2 + 2xz}{x^2y + y^2z + z^2x} \right).$$

В точката $M_0(0;1;1)$ градиентът е

$$\mathbf{grad}\, u(M_0) = (1,\ 2,\ 1)\,.$$

Тогава
$$\left.\frac{\partial u}{\partial \mathbf{l}(t_0)}\right|_{M_0} = (1,\ 2,\ 1)\,\frac{\left(-\frac{1}{2},\ 0,\ 0\right)}{0,5} = -1$$

Всички пресмятания се правят с помощта на описания по-долу код. Използват се $grad, subs, simplify, diff, solve, dotprod$ и библиотека $linalg$.

```
> restart;with(linalg):u:=ln(x^2*y+y^2*z+z^2*x);
> grd:=grad(u,[x,y,z]);
> grdM:=[subs(x=0,y=1,z=1,grd[1]),subs(x=0,y=1,z=1,grd[2]),
    subs(x=0,y=1,z=1,grd[3]) ];
> elips:=[1/2*cos(t),sin(t),1];
> tau:=diff(elips,t);
> s1:=solve({elips[1]=0,elips[2]=1},t); tM:=s1[1];
> tauM:=simplify(subs(tM,tau)); L:=tauM;
   Lnorm:=L/sqrt(dotprod(L,L));
> dotprod(grdM,Lnorm);
```

Задача 62. Намерете производната на скаларното поле $u(x, y, z) = x\sqrt{y} + y\sqrt{z}$ в точката $N(2; 9; 4)$ по посока на точката $P(0; -4; 5)$.

Решение: Използваме решението на пример 10, като в случая направлението е векторът $\overrightarrow{NP}$, т.е. $\mathbf{l} = (-2, -13, 1)$. Следва актуализираният код:

```
> restart;with(linalg):
> u:=x* sqrt(y)+ y*sqrt(z);
> grd:=grad(u,[x,y,z]);
> grdM:=[subs(x=2,y=9,z=4,grd[1]),subs(x=2,y=9,z=4,grd[2]),
    subs(x=2,y=9,z=4,grd[3]) ];
> L:=[0-2,-4-9,5-4]; Lnorm:=L/sqrt(dotprod(L,L));
> simplify(dotprod(grdM,Lnorm));
```

Отговор: $-\dfrac{409}{2088}\sqrt{174}$.

Задача 63. Намерете производната на равнинното скаларно поле $u(x, y) = x^4 + xy + 2y^3$ в точката $M(1; -1)$ по посока на вектора, лежащ в равнината xOy, който сключва ъгъл $\dfrac{\pi}{3}$ с положителната посока на оста Ox.

Решение: В случая $\mathbf{l} = (\cos\dfrac{\pi}{3}, \sin\dfrac{\pi}{3})$. Актуализираният код е:

```
> u:=x^4+x*y+2* y^3;
> grd:=grad(u,[x,y]);
> grdM:=[subs(x=1,y=-1,grd[1]),subs(x=1,y=-1,grd[2])];
> L:=[cos(Pi/3), sin(Pi/3)]; Lnorm:=L/sqrt(dotprod(L,L));
> dotprod(grdM,Lnorm);
```

Отговор: $\dfrac{3}{2}+\dfrac{7}{2}\sqrt{3}$.

Задача 64. Пресметнете производната на скаларното поле $u(x,y,z) = arctg\dfrac{y}{x}+xz$ в точката $M_0(2;2;-1)$ по посока на нормалата към повърхнината

$$S \equiv \left\{x^2+y^2-2z=10\right\},$$

която образува остър ъгъл с положителната посока но оста Oz.

Решение: Повърхнината може да се параметризира по следния начин:

$$S \equiv \left\{x=u,\ y=v,\ z=\frac{1}{2}\left(u^2+v^2\right)-5 \,|\, u,v\in\mathbb{R}\right\}.$$

В произволна точка от повърхнината двата тангенциални вектора се пресмятат чрез диференциране по параметрите: $\mathbf{r}_{\ u}=(1,0,u)$ и $\mathbf{r}_{\ v}=(0,1,v)$ и векторното им произведение е $(-u,-v,1)$. Нормалният вектор в точката M_0 се получава $(-2,-2,1)$. Скаларното произведение на този вектор с вектора $(0;0;1)$ е положително, следователно направлението, по което се търси производната, е $\mathbf{l}=(-2,-2,1)$. Градиентът на скаларното поле в произволна точка е

$$\mathbf{grad}u(M)=\left(-\frac{y}{x^2+y^2}+z,\ -\frac{x}{x^2+y^2},\ x\right),$$

откъдето получаваме градиента в точка M_0, $\mathbf{grad}u(M_0)=\left(-\dfrac{5}{4},\dfrac{1}{4},2\right)$ и търсената производна по исканото направление

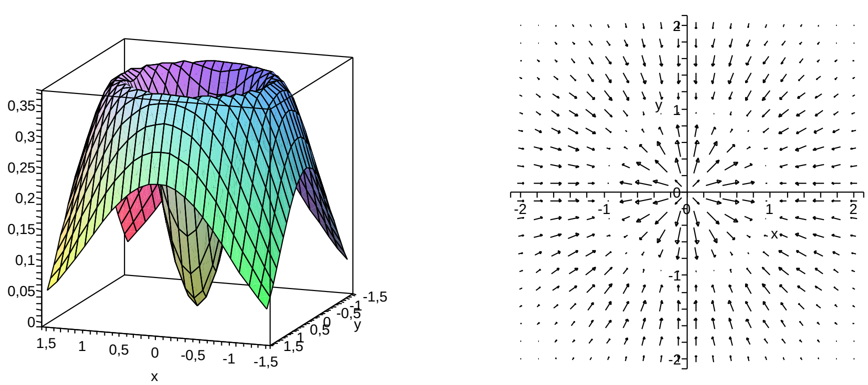
$$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{M_0}=\left(-\frac{5}{4},\frac{1}{4},2\right)\frac{(-2,-2,1)}{\sqrt{(-2)^2+(-2)^2+1}}=\frac{4}{3}.$$

Приложеният код извършва пресмятанията. Необходима е библиотека *linalg*.

```
> restart;with(linalg):U:=arctan(y/x)+x*z:
> S:=[u,v,(u^2+v^2)/2-5]:
> ru:=diff(S,u): rv:=diff(S,v): N:=crossprod(ru,rv):
> N_M:=[subs(u=2,v=2,N[1]),subs(u=2,v=2,N[2]),subs(u=2,v=2,N[3])]:
> dotprod(N_M,[0,0,1]):
> g:=grad(U,[x,y,z]):
> g_M:=[subs(x=2,y=2,z=-1,g[1]),subs(x=2,y=2,z=-1,g[2]),
   subs(x=2,y=2,z=-1,g[3])]:
> dotprod(N_M,g_M)/sqrt(dotprod(N_M,N_M));
```

Задача 65. Да се изследва скаларното поле $u(x,y) = (x^2+y^2)e^{-(x^2+y^2)}$ за локален екстремум. Да се потвърдят резултатите с *gradplot*.

Решение:



(а) Локални екстремуми (б) Градиентът на скаларното поле

ФИГУРА 6. Локални екстремуми на скаларно поле

```
> z:=(x,y)->(x^2+y^2)*exp(-x^2-y^2);
 zx:=unapply(diff(z(x,y),x),[x,y]);
 zy:= unapply(diff(z(x,y),y),[x,y]);
 zxx:= unapply(diff(z(x,y),x,x),[x,y]);
 zxy:=unapply(diff(z(x,y),x,y),[x,y]);
 zyx:= unapply(diff(z(x,y),y,x),[x,y]);
 zyy:=unapply(diff(z(x,y),y,y),[x,y]);
 statpt:=solve({zx(x,y)=0,zy(x,y)=0},{x,y});
 zxxM:=zxx(0,0);zxyM:= zxy(0,0);
 zyxM:=zyx(0,0); zyyM:=zyy(0,0);
 with(linalg):
```

```
Delta:=matrix([[zxxM, zxyM],[ zyxM, zyyM]]);det(Delta);
zmin:=z(0,0);
with(plots):
plot3d((x^2+y^2)*exp(-x^2-y^2),x=-1.5..1.5,y=-1.5..1.5);
gradplot(z(x,y),x=-2..2,y=-2..2,arrows=SLIM);
```

Зоните, в които градиентът е нула, показват къде са възможните локални екстремуми, в случая в координатното начало и по централната единична окръжност. Посоките на градиента на скаларното поле показват вида на локалния екстремум, строг локален минимум в координатното начало и нестрог локален максимум по точките от централната единична окръжност (ФИГУРА 6).

Задача 66. Да се намери точката, в която градиентът на скаларното поле $u = \sin(3x+4y)$ е равен на $3\mathbf{i}+4\mathbf{j}$.

Решение: Градиентът на скаларното поле в произволна точка е

$$\mathbf{grad}\, u(M) = (3\cos(3x+4y),\ 4\cos(3x+4y))\,.$$

Точките в равнината, чиито координати удовлетворяват уравнението

$$\cos(3x+4y) = 1$$

се намират върху правите с уравнения

$$3x+4y = 2k\pi,\ k = 0,\ \pm 1,\ \pm 2, \dots .$$

Задача 67. Означаваме $\mathbf{r}\ = x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$, $r = |\mathbf{r}\ | = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Да се намери ъгълът между градиентите на скаларните полета $u = r$ и $v = \ln(r^2)$ в точката $M_0(0,0,1)$.

Решение: Последователно се пресмятат:

$$\mathbf{grad}\, u = \frac{\partial r}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial r}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial r}{\partial z}\mathbf{k} = \frac{x}{r}\mathbf{i} + \frac{y}{r}\mathbf{j} + \frac{z}{r}\mathbf{k},$$

$$\mathbf{grad}\, u(M_0) = \mathbf{k},$$

$$\mathbf{grad}\, v = \frac{\partial \ln(r^2)}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial \ln(r^2)}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial \ln(r^2)}{\partial z}\mathbf{k} = \frac{2x}{r^2}\mathbf{i} + \frac{2y}{r^2}\mathbf{j} + \frac{2z}{r^2}\mathbf{k},$$

$$\mathbf{grad}\, v(M_0) = 2\mathbf{k}$$

и за ъгъла φ между градиентите на скаларните полета в точката $M_0(0,0,1)$ се получава

$$\varphi = \arccos\frac{2}{2} = 0.$$

Задача 68. Да се покаже, че полето на теглото на материалните точки е потенциално. Да се намери потенциалът му.

Решение: Относно тримерна декартова правоъгълна координатна система, за която оста Oz е насочена към центъра на Земята, векторното поле на теглото е $\mathbf{G} = mg\mathbf{k}$, където m е масата на материалната точка, а g е земното ускорение. Роторът на това векторно поле е равен на нулевия вектор:

$$\mathbf{rot}\mathbf{G} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & mg \end{vmatrix} = \mathbf{0}.$$

Следователно полето е потенциално. Функцията $U = mgz$ е потенциална функция за това векторно поле, т.е. $\mathbf{grad}\,U = \mathbf{G}$.

Задача 69. Да се покаже, че полето на вектора на Нютоновите гравитационни сили на взаимно привличане, действащи на всеки две материални точки, е потенциално и да се намери неговият потенциал.

Решение: Нека полюсът на привличане е точка $A(a,b,c)$ с маса m_1. Тогава големината на гравитационната сила, с която точка $M(x,y,z)$ с маса m_2 се привлича от полюса, е правопропорционална на произведението на масите на двете точки и обратнопропорционална на квадрата на разстоянието между тях

$$|\mathbf{F}| = \gamma\,\frac{m_1\,m_2}{r^2},$$

където $\gamma = 6,67.10^{-11} Nm^2/kg^2$ е гравитационната константа, а

$$r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}$$

е разстоянието между двете точки. Означаваме $K = \gamma\, m_1\, m_2$. Тогава

$$\mathbf{F} = K\frac{a-x}{r^3}\mathbf{i} + K\frac{b-y}{r^3}\mathbf{j} + K\frac{c-z}{r^3}\mathbf{k}.$$

Елементарната работа е

$$dU = \mathbf{F}(dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k})$$

$$= K\,\frac{(a-x)dx+(b-y)dy+(c-z)dz}{r^3}$$
$$= -\frac{Krdr}{r^3} = -\frac{Kdr}{r^2} = d\frac{K}{r}.$$

Потенциалът е

$$U(x,y,z) = \frac{K}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}}.$$

Задача 70. Да се покаже, че магнитното поле, създадено от електрически ток, протичащ по прав (безкраен) проводник, е потенциално и да се намери потенциалът му.

Решение: Нека оста Oz съвпада с правия проводник, по който тече ток със сила J. Векторът на напрегнатостта на магнитното поле в точка M, която се намира на разстояние r от оста, има големина

$$H = \frac{KJ}{r},$$

(правило на Ампер), където K е константа и $\mathbf{H}$ е перпендикулярен на равнината, минаваща през точката M и оста Oz. Проектираме върху координатните оси,

$$\mathbf{H} = -\frac{KJ}{r}\sin\theta\,\mathbf{i} + \frac{KJ}{r}\cos\theta\,\mathbf{j},$$

като с θ е означен ъгълът между положителната посока на оста Ox и радиус-вектора на ортогоналната проекция на точка M върху равнината Oxy. Нека x и y са абсцисата и ординатата на точка M, тогава

$$\mathbf{H} = -KJ\frac{y}{x^2+y^2}\mathbf{i} + KJ\frac{x}{x^2+y^2}\mathbf{j}.$$

Роторът на това векторно поле е равен на нулевия вектор:

$$\mathbf{rot}\mathbf{H} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ -KJ\dfrac{y}{x^2+y^2} & KJ\dfrac{x}{x^2+y^2} & 0 \end{vmatrix} = \mathbf{0},$$

следователно полето е потенциално. Елементарната работа на вектора на напрегнатостта е

$$\mathrm{d}A = -KJ\frac{y}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x + KJ\frac{x}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}y,$$

$$\mathrm{d}A = KJ\frac{x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x}{x^2+y^2} = KJ\,\mathrm{d}\,arctg\left(\frac{y}{x}\right).$$

Потенциалът е

$$U(x,y) = KJ\,arctg\left(\frac{y}{x}\right).$$

Задача 71. Да се провери дали полето на вектора $\overrightarrow{a} = (y+z)\mathbf{i} + (x+z)\mathbf{j} + (x+y)\mathbf{k}$ е потенциално (безвихрово) и в случай на безвихрово поле да се намери потенциалът му.

Решение: Наистина, ако съществува потенциална функция $F(x,y,z)$, то тя е решение на следната система частни диференциални уравнения от първи ред:

$$\left|\begin{array}{l} \dfrac{\partial F}{\partial x} = y+z, \\[2ex] \dfrac{\partial F}{\partial y} = x+z, \\[2ex] \dfrac{\partial F}{\partial z} = y+x. \end{array}\right.$$

Лесно се интегрира първото уравнение относно x и се получава

$$F(x,y,z) = xy + xz + \varphi(y,z).$$

След заместване във второто и третото уравнение получаваме система частни диференциални уравнения от първи ред относно неизвестната функция на две променливи $\varphi(y,z)$:

$$\left|\begin{array}{l} \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = z, \\[2ex] \dfrac{\partial \varphi}{\partial z} = y. \end{array}\right.$$

След интегриране относно y се получава $\varphi(y,z) = yz + \psi(z)$ и от второто уравнение следва $\psi'(z) = 0$, откъдето се намира $F(x,y,z) = xy+yz+zx+C$, $C \in \mathbb{R}$. Този резултат се потвърждава чрез използване на MAPLE. Чрез *curl* се пресмята роторът, той се оказва нулевият вектор, следователно съществува потенциална функция $F(x,y,z)$, която се намира с *potential*.

```
> a:=[y+z,x+z,x+y]; v:=[x,y,z];
> curl(a,v);
> potential(a,v,'F'); F;
```

Задача 72. Дадена е векторната функция на една променлива $\mathbf{r} = t\mathbf{i}+t\mathbf{j}+t^2\mathbf{k}$. Начертайте кривата Γ в пространството, която има за векторно- параметрично уравнение тази векторна функция, при $t \in [-2; 2]$. Начертайте кривата като пресечница на две повърхнини.

Решение: От скаларно-параметричните уравнения

$$\Big|\ x = t, \quad y = t, \quad z = t^2.$$

изключваме параметъра и получаваме кривата Γ като пресечница на двете повърхнини с уравнения $z = x^2$ и $x = y$.

```
> implicitplot3d([x=y,z=x^2],x=-2..2,y=-2..2,z=-2..2):
```

Задача 73. Да се намери фамилията от векторни линии на полето $\mathbf{a} = (x, 2y)$ и се начертаят тези от тях, които минават през точките $M_1(1, -1)$ и $M_2(-1, 2)$.

Решение: В този случай системата (5.1.2) се състои само от едно уравнение:

$$\frac{\mathrm{d}x}{x} = \frac{\mathrm{d}y}{2y}$$

В координатното начало стойността на векторното поле е нулевият вектор, който е линейно зависим с всеки вектор. Общото решение на диференциалното уравнение е еднопараметрична фамилия от параболи

$$y = Cx^2$$

и като вземем предвид условието $y(1) = -1$, намираме търсената векторна линия, минаваща през точката $M_1(1, -1)$, $y = -x^2$, аналогично получаваме векторната линия $y = 2x^2$, минаваща през точката $M_2(-1, 2)$. Тъй като дивергенцията на векторното поле във всяка точка е равна на положителната константа 3, то всяка точка е източник. Графичното представяне на резултатите е на ФИГУРА 7, а).

```
> restart;with(plots):
> df1:=fieldplot( [x,2*y],x=-2..2,y=-2..2,grid=[16,16]):
  df2:=implicitplot({y=-x^2,y=2*x^2},x=-2..2,y=-2..2):
  df3:=plot({[1,-1], [-1,2]},style=point,color=blue,symbol=circle):
  display(df1,df2,df3);
```

Задача 74. Да се намери фамилията от векторни линии на полето $\mathbf{a} = (x^2, y^2)$ и се начертае тази от тях, която минава през точката $M_0(1, 4)$.

Решение: От (5.1.2) се получава уравнението

$$\frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \frac{\mathrm{d}y}{y^2},$$

То се решава с MAPLE, като за независима променлива е приета x :

```
> dsolve({diff(y(x),x)=y(x)^2/x^2,y(1)=4},y(x)):
```

Търсената векторна линия е $y = \dfrac{4x}{4-3x}$.

Задача 75. Да се намери фамилията от векторни линии на полето $\mathbf{a} = (x, y, z)$ и се начертае тази от тях, която минава през точката $M_0(1, -2, 4)$.

Решение: Системата обикновени диференциални уравнения, която характеризира векторните линии на полето, е:

$$\frac{\mathrm{d}x}{x} = \frac{\mathrm{d}y}{y} = \frac{\mathrm{d}z}{z}.$$

Това е система от две обикновени диференциални уравнения относно две неизвестни функции на една променлива, записана в диференциален вид, в който ролите на трите променливи са напълно симетрични. Нека променливата x е независимата променлива, тогава системата се записва по следния начин:

$$\left| \begin{aligned} y^{'} &= \frac{y}{x}, \\ z^{'} &= \frac{z}{x}. \end{aligned} \right.$$

Общото решение на тази система (в случая системата се разпада на две независими линейни хомогенни обикновени диференциални уравнения) зависи от две произволни константи:

$$y = C_1 x,\ z = C_2 x.$$

Пресечницата на една равнина от едната фамилия с равнина от другата фамилия е векторна линия за полето. Двете равнини минават през точка M_0, когато $C_1 = -2$, $C_2 = 4$, следователно търсената векторна линия е пресечница на равнините $y = -2x$, $z = 4x$. Използваме *dsolve* в кода, даващ решението.

```
> restart;with(plots):
> eq1:=diff(y(x),x)=y(x)/x:  eq2:=diff(z(x),x)=z(x)/x:
> sys:=eq1,eq2:  cond:=y(1)=-2,z(1)=4:
> dsolve({sys,cond},{y(x),z(x)}):
> implicitplot3d([y=-2*x,z=4*x],x=-2..2,y=-2..2,z=-2..2);
```

Задача 76. Да се намери фамилията от векторни линии на полето $\mathbf{a} = (-y, x, 5)$ и се начертае минаващата през точката $M_0(1,1,1)$ векторна линия.

Решение: Системата обикновени диференциални уравнения, чиито решения дават фамилията от векторни линии на полето, е следната:

$$\frac{\mathrm{d}x}{-y} = \frac{\mathrm{d}y}{x} = \frac{\mathrm{d}z}{5}.$$

Има една интегруема комбинация:

$$x\,\mathrm{d}x = -y\,\mathrm{d}y.$$

След интегриране на обикновеното диференциално уравнение с отделени променливи се получава

$$x^2 + y^2 = C_1.$$

Тъй като се търси решението в околност на точката M_0, сметките могат да се продължат със следния клон на неявната функция $y = y(x)$:

$$y(x) = \sqrt{C_1 - x^2}.$$

От условието $y(1) = 1$ се определя $C_1 = 2$ и едната повърхнина, минаваща през точка M_0, е

$$y(x) = \sqrt{2 - x^2}.$$

За получаване на втора интегруема комбинация $y(x) = \sqrt{2 - x^2}$ се замества в уравнението $\dfrac{\mathrm{d}x}{-y} = \dfrac{\mathrm{d}z}{5}$ и се получава:

$$\frac{\mathrm{d}x}{-\sqrt{2 - x^2}} = \frac{\mathrm{d}z}{5},$$

обикновеното диференциално уравнение с отделени променливи. Общото му решение е

$$z(x) = -5 \arcsin \frac{\sqrt{2}\,x}{2} + C_2.$$

Условието $z(1) = 1$ е изпълнено при

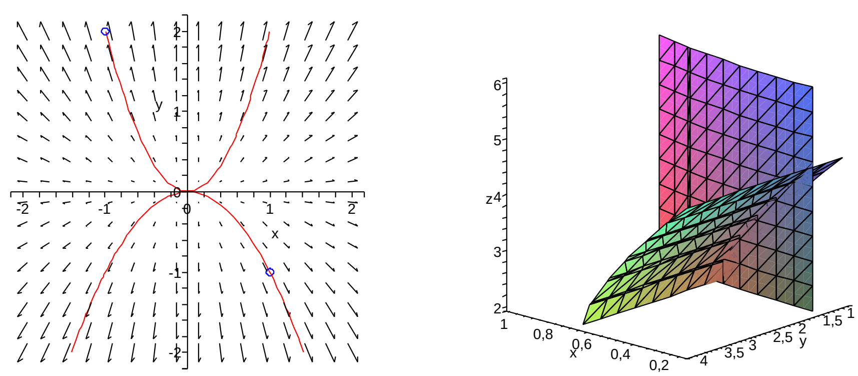
$$1 = -5 \arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} + C_2,$$

и следователно $C_2 = 1 + \dfrac{5}{4}\pi$. Втората повърхнина, минаваща през точка M_0, е

$$z(x) = -5 \arcsin \frac{\sqrt{2}\,x}{2} + 1 + \frac{5}{4}\pi.$$

Ето как изглежда решението с MAPLE:

```
> restart;with(plots):
> eq1:=diff(y(x),x)=-x/y(x); dsolve({eq1,y(1)=1},y(x));
> eq2:=diff(z(x),x)=-5/sqrt(2-x^2); dsolve({eq2,z(1)=1},z(x));
> implicitplot3d( [-5*arcsin(sqrt(2)*x)/2+1+5/4*Pi-z=0,
   y-sqrt(2-x^2)=0] ,x=0.1..1.1, y=0.8..4, z=0.8..6);
```



(а) В равнината (б) В пространството

ФИГУРА 7. Векторни линии

Графичното представяне е на ФИГУРА 7, (б).

Задача 77. Да се намери фамилията от векторни линии на полето

$$\mathbf{a} = (z - y, x - z, y - x)$$

и се начертае тази, която минава през точката $M_0(-3, 0, 4)$.

Решение: Съставя се системата обикновени диференциални уравнения, които се удовлетворяват от векторни линии на полето:

$$\frac{\mathrm{d}x}{z-y} = \frac{\mathrm{d}y}{x-z} = \frac{\mathrm{d}z}{y-x}. \tag{5.1.12}$$

Тъй като няма очевидна интегруема комбинация, за да се получи такава, може да се използва правилото на пропорцията:

Нека числата (изразите) $a_i, b_i, i = 1, 2, ..., n, n \in \mathbb{N}$ са всичките различни от нула и

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \ldots = \frac{a_n}{b_n}. \tag{5.1.13}$$

Ако поне едно от числата $\lambda_i, i = 1, 2, ..., n, n \in \mathbb{N}$ е различно от нула, то е вярно

$$\frac{\lambda_1\, a_1 + \lambda_2\, a_2 + \ldots + \lambda_n\, a_n}{\lambda_1\, b_1 + \lambda_2\, b_2 + \ldots + \lambda_n\, b_n} = \frac{a_1}{b_1}. \tag{5.1.14}$$

Нека означим общото отношение в (5.1.13) с r. Тогава от (5.1.13) следва

$$a_i = r\, b_i, i = 1, 2, ..., n, n \in \mathbb{N}.$$

След заместване в лявата част на (5.1.14) се получава:

$$\frac{\lambda_1\, a_1 + \lambda_2\, a_2 + \ldots + \lambda_n\, a_n}{\lambda_1\, b_1 + \lambda_2\, b_2 + \ldots + \lambda_n\, b_n} = \frac{\lambda_1\, r\, b_1 + \lambda_2\, r\, b_2 + \ldots + \lambda_n\, r\, b_n}{\lambda_1\, b_1 + \lambda_2\, b_2 + \ldots + \lambda_n\, b_n} = r,$$

с което правилото за пропорцията е доказано.

След прилагане на това правило към (5.1.12) за $\lambda_1 = x, \lambda_2 = y, \lambda_3 = z$ се получава интегруемата комбинация

$$x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y + z\,\mathrm{d}z = 0,$$

и след интегриране се намира общото решение, което представлява еднопараметричната фамилия от сфери

$$x^2 + y^2 + z^2 = C_1. \tag{5.1.15}$$

Като се приложи отново правилото за пропорцията към (5.1.12) за $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 1$, се намира втора интегруема комбинация:

$$\mathrm{d}x + \mathrm{d}y + \mathrm{d}z = 0,$$

и след интегриране се получава втора еднопараметрична фамилия от равнини:

$$x + y + z = C_2. \tag{5.1.16}$$

Векторните линии са окръжности в тримерното пространство, които се получават при пресичане на сфера и равнина. Да намерим сферата и равнината, минаващи през точка M_0. След заместване на координатите на тази точка в (5.1.15) и (5.1.16) се получават стойностите на константите, при които сферата и равнината минават през точка M_0. Търсената векторна линия е пресечница на сферата $x^2+y^2+z^2 = 25$ и равнината $x+y+z = 1$. За чертежа виж Задача 75. Тази задача е добър пример за участието на човека в процеса на решаване. Ако формално се използват възможностите на MAPLE, едва ли успехът ще е лесен и бърз .

5.2 Поток

Нека S е гладка, двустранна, несамопресичаща се и ограничена повърхнина, зададена с векторно-параметричните си уравнения

$$S \equiv \mathbf{r}(u,v) = x(u,v)\mathbf{i} + y(u,v)\mathbf{j} + z(u,v)\mathbf{k},\ (u,v) \in D \subset \mathbb{R}^2,$$

и с τ_0 означим тангенциалната равнина в произволна, но фиксирана точка M_0 от нея. Да разгледаме достатъчно малка околност от точки на точката M_0 от повърхнината S, които се намират в едното полупространство $\mathbb{R}^3_+$, дефинирано от тангенциалната равнина τ_0. Да означим с $\mathbb{R}^3_-$ полупространството, несъдържащо точки от S, с изключение на точка M_0.

Дефиниция 5.2.1. Нормалният (перпендикулярният) спрямо тангенциалната равнина τ_0 свързан вектор с начало в точката M_0, принадлежащ на полупространсвото $\mathbb{R}^3_-$, се нарича външен нормален вектор на повърхнината в тази точка.

Говори се и за вътрешна нормала в точка от повърхнина. С $\mathbf{N}(A,B,C)$ означаваме нормалния вектор към повърхнината. С точност до посока единичният нормален вектор в произволна точка M от повърхнината S ще означаваме с $\mathbf{n}$ и

$$\mathbf{n} = \pm\frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|} = \frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\,(A,B,C) = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma),$$

където

$$A = y'_u x'_v - x'_u y'_v,\ B = z'_u x'_v - x'_u z'_v,\ C = x'_u y'_v - y'_u x'_v$$

Означаваме с E, F и G коефициентите на Гаус, дефинирани с (3.1.8):

$$E = \mathbf{r}_u\,\mathbf{r}_u = (x'_u)^2 + (y'_u)^2 + (z'_u)^2, F = \mathbf{r}_u\mathbf{r}_v = x'_u x'_v + y'_u y'_v + z'_u z'_v,$$

$$G = \mathbf{r}_v\mathbf{r}_v = (x'_v)^2 + (y'_v)^2 + (z'_v)^2.$$

Може да се докаже, че

$$EG - F^2 = A^2 + B^2 + C^2.$$

Нека имаме дефинирано векторно поле

$$\mathbf{v}(x, y, z) = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}$$

в $\mathbb{R}^3$, което има смисъл на скорост на флуид.

Дефиниция 5.2.2. Количеството флуид, преминаващо през S за единица време, се нарича *поток* на векторното поле през повърхнината S.

Потокът се пресмята чрез повърхнинен интеграл от втори род:

$$\Pi = \iint\limits_S P\,\mathrm{d}\,y\mathrm{d}z + Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + R\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_S \mathbf{vn}\,\mathrm{d}\sigma,$$

където $\mathrm{d}\,\sigma$ е лицевият елемент на повърхнината и

$$d\sigma = \sqrt{EG - F^2}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v.$$

Нека гладката повърхнината S е зададена с векторно-параметрично уравнение

$$\mathbf{r}(x, y, z) = x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j} + z(u, v)\mathbf{k},\ (u, v) \in D \subset \mathbb{R}^2,$$

и векторното поле $\mathbf{v}$ е дефинирано и ограничено върху S. Тогава повърхнинният интеграл от втори род се изразява чрез повърхнинен интеграл от първи род:

$$\Pi = \iint\limits_S \mathbf{vn}\,\sqrt{EG - F^2}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v,$$

който се свежда до двоен интеграл:

$$\Pi = \iint\limits_D \{P[x(u, v), y(u, v), z(u, v)]\cos\alpha + Q[x(u, v), y(u, v), z(u, v)]\cos\beta$$

$$+R[x(u,v),y(u,v),z(u,v)]\cos\gamma\}\sqrt{EG-F^2}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

или

$$\Pi=\iint\limits_D (PA+QB+RC)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v.$$

Да се сравни с (4.4.2) и (4.4.3). Повърхнинният интеграл зависи от посоката на нормалата и за двустранна повърхнина са възможни две стойности, които се различават по знак.

Задача 78. Да се пресметне потокът на векторното поле $\mathbf{a}=xyz\mathbf{i}-y^2\mathbf{j}+z\mathbf{k}$ по външната нормала на повърхнината на паралелепипеда:

$$0\le x\le 1,\quad 0\le y\le 2,\quad 0\le z\le 3.$$

Решение: Пресмятанията ще направим за всяка една от шестте стени на тялото.

Нека разгледаме стената $x=0$. Външната нормала е $\mathbf{N}_1=(-1,0,0)$. Параметричните уравнения са

$$S_1\equiv\{x=0,y=u,z=v\mid(u,v)\in D_1\},$$

$$D_1\equiv\{(u,v)\mid 0\le u\le 2,0\le v\le 3\}.$$

Потокът се пресмята чрез двойния интеграл

$$\Pi_1=\iint\limits_{D_1}0\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v=0.$$

За стената $x=1$ външната нормала е $\mathbf{N}_2=(1,0,0)$. Параметричните уравнения са:

$$S_2\equiv\{x=1,y=u,z=v\mid(u,v)\in D_2\},$$

$$D_2\equiv\{(u,v)|0\le u\le 2,0\le v\le 3\}.$$

Потокът се пресмята чрез двойния интеграл

$$\Pi_2=\iint\limits_{D_2}uv\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v=9.$$

За стената $y = 0$ външната нормала е $\mathbf{N}_3 = (0, -1, 0)$. Параметричните уравнения са:

$$S_3 \equiv \{x = u, y = 0, z = v \mid (u, v) \in D_3\},$$

$$D_3 \equiv \{(u, v) \mid 0 \le u \le 1, 0 \le v \le 3\}.$$

Потокът се пресмята чрез двойния интеграл

$$\Pi_3 = \iint\limits_{D_3} 0 \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v = 0.$$

За стената $y = 2$ външната нормала е $\mathbf{N}_4 = (0, 1, 0)$. Параметричните уравнения са:

$$S_4 \equiv \{x = u, y = 2, z = v \mid (u, v) \in D_4\},$$

$$D_4 \equiv \{(u, v) \mid 0 \le u \le 1, 0 \le v \le 3\}.$$

Потокът се пресмята чрез двойния интеграл

$$\Pi_4 = \iint\limits_{D_4} (-4) \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v = -12.$$

За стената $z = 0$ външната нормала е $\mathbf{N}_5 = (0, 0, -1)$. Параметричните уравнения са:

$$S_5 \equiv \{x = u, y = v, z = 0 \mid (u, v) \in D_5\},$$

$$D_5 \equiv \{(u, v) \mid 0 \le u \le 1, 0 \le v \le 2\}.$$

Потокът се пресмята чрез двойния интеграл

$$\Pi_5 = \iint\limits_{D_5} 0 \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v = 0.$$

И за шестата стена $z = 3$ външната нормала е $\mathbf{N}_6 = (0, 0, 1)$. Параметричните уравнения са:

$$S_6 \equiv \{x = u, y = v, z = 3 \mid (u, v) \in D_6\},$$

$$D_6 \equiv \{(u, v) \mid 0 \le u \le 1, 0 \le v \le 2\}.$$

Потокът се пресмята чрез двойния интеграл

$$\Pi_6 = \iint\limits_{D_6} 3\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = 6.$$

Окончателно за потока се получава

$$\Pi = 9 - 12 + 6 = 3.$$

С помощта на MAPLE потокът в тази задача може да се пресметне и така:

```
> restart; with(VectorCalculus):
> Flux(VectorField(<x*y*z,-y^2,z>,cartesian[x,y,z]),
Box(0..1,0..2,0..3));
```

Задача 79. Да се пресметне потокът на векторното поле $\mathbf{a} = y\mathbf{i} + z\mathbf{j} + x\mathbf{k}$ през частта от равнината с отрези 2, 1, 4 по осите Ox, Oy, Oz в първи квадрант по нормалата, насочена към полупространството, не съдържащо координатното начало.

Решение: Отрезовото уравнение на равнината е

$$\frac{x}{2} + y + \frac{z}{4} = 1.$$

В този случай частта от повърхнината е графиката на явно зададената функция на две променливи:

$$z = 4 - 2x - 4y$$

и най-естествено е за параметри да се приемат независимите променливи x и y. Тогава

$$S \equiv \{x = u, y = v, z = 4 - 2u - 4v \mid (u, v) \in D\},$$

$$D \equiv \left\{(u, v)|0 \le u \le 2, 0 \le v \le 1 - \frac{u}{2}\right\}.$$

Нормалният вектор е $\mathbf{N} = \left(\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{4}\right)$. Директорните косинуси на нормалния вектор са $\left(\frac{2\sqrt{21}}{21}, \frac{4\sqrt{21}}{21}, \frac{\sqrt{21}}{21}\right)$. Пресмята се лицевият елемент:

$$\mathbf{r} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + (4 - 2u - 4v)\mathbf{k},\ \mathbf{r}'_u = (1, 0, -2),\ \mathbf{r}'_v = (0, 1, -4),$$

$$E = \mathbf{r}'_u\mathbf{r}'_u = 5,\ F = \mathbf{r}'_v\mathbf{r}'_v = 17,\ G = \mathbf{r}'_u\mathbf{r}'_v = 8,$$
$$\mathrm{d}\,\sigma = \sqrt{5.17 - 8^2}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \sqrt{21}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v.$$

Потокът се пресмята с двойния интеграл

$$\Pi = \iint\limits_D (-7u - 14v + 16)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \int\limits_0^2 \mathrm{d}u \int\limits_0^{1-0{,}5u} (-7u - 14v + 16)\,\mathrm{d}v$$

$$= \int\limits_0^2 (1,75u^2 - 8u + 9)\,\mathrm{d}u = \frac{20}{3}.$$

Задача 80. Да се пресметне потокът на векторното поле $\mathbf{p} = x^2\mathbf{i} - y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ по външната нормала на околната повърхнината на цилиндъра

$$x^2 + y^2 = a^2, \quad 0 \le z \le 1, \quad a > 0.$$

Решение: Параметризацията на частта от повърхнината, по която търсим потока, може да се направи, като се използва цилиндрична координатна система:

$$S \equiv \{\mathbf{r} = a\cos t\,\mathbf{i} + a\sin t\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k} \mid (t, z) \in D\},$$
$$D \equiv \{(t, z) \mid 0 \le t \le 2\pi,\ 0 \le z \le 1\}.$$

Тангенциалните вектори в произволна точка на гладката повърхнина са

$$\mathbf{r}'_t = (-a\sin t, a\cos t, 0),\ \mathbf{r}'_z = (0, 0, 1),$$

а векторното им произведение е нормален вектор за повърхнината:

$$\mathbf{N} = \mathbf{r}'_t \times \mathbf{r}'_z = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -a\sin t & a\cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (a\cos t, a\sin t, 0).$$

Директорните косинуси са

$$\cos t,\ \sin t,\ 0.$$

Пресмятат се коефициентите на Гаус и повърхнинният елемент:

$$E = (a\cos t)^2 + (a\sin t)^2 = a^2, F = (a\cos t)0 + (a\sin t)0 + 0(1) = 0,$$

$$G = 0^2 + 0^2 + 1^2 = 1,\ \mathrm{d}\sigma = \sqrt{a^2}\,\mathrm{d}t\mathrm{d}z = a\,\mathrm{d}t\mathrm{d}z.$$

Потокът се получава след пресмятането на двойния интеграл:

$$\Pi = \iint\limits_D (a^3\cos^3 t - a^2\sin^2 t)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}z = \int\limits_0^1 \mathrm{d}z \int\limits_0^{2\pi} (a^3\cos^3 t - a^2\sin^2 t)\,\mathrm{d}t$$

$$= \int\limits_0^1 (-a^2\pi)\,\mathrm{d}z = -a^2\pi.$$

Следващият код пресмята потока през част от гладка повърхнина, зададена в параметричен вид. Когато повърхнината е частично гладка или затворена при подходящо представяне на повърхнината като обединение на краен брой частично гладки части от повърхнини, кодът може да се използва многократно за пресмятане на потоците по тези краен брой частично гладки части. За тази цел се препоръчва написване на процедура.

```
> restart; with(linalg):  assume(a>0);
# инициализация
  pole:=[x^2, -y, z]; r:=[a*cos(t),a*sin(t),z];
> # тангенциални вектори към повърхнината и нормален вектор
  rt:=diff(r,t); rz:=diff(r,z); nvect:=crossprod(rt,rz);
  daljina:= simplify(sqrt(  sum(nvect[i]^2, i=1..3) ));
  nvect0:=[seq(nvect[i]/daljina, i=1..3)];
> # коефициенти на Гаус
  E:=simplify(sum(rt[i]^2,i=1..3));
  F:=simplify(sum(rt[i]*rz[i],i=1..3));
  G:=simplify(sum(rz[i]^2,i=1..3));
> # повърхнинен елемент
  sigma:=simplify(sqrt(E*G-F^2));
> # подинтегрална функция на двойния интеграл
  pole1:=simplify(subs({x=r[1],y=r[2],z=r[3]},pole));
  f:=expand( sum(pole1[i]*nvect0[i], i=1..3) * sigma );
> # пресмятане на двойния интеграл
  f1:=int(f,t=0..2*Pi);
  flx:=int(f1,z=0..1);
```

Задача 81. Да се пресметне потокът на векторното поле $\mathbf{p} = xz\mathbf{i} + \mathbf{k}$ по външната нормала на полусферата

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \quad 0 \leq z, \quad a > 0,$$

и резултатът да се сравни с резултата от актуализирания код от Задача 80.

Решение: Параметризацията на полусферата, по която търсим потока, може да се направи, като се използва сферична координатна система:

$$S \equiv \{\mathbf{r} = a\cos\varphi\sin\theta\,\mathbf{i} + a\sin\varphi\sin\theta\,\mathbf{j} + a\cos\theta\,\mathbf{k} \mid (\varphi, \theta) \in D\},$$

$$D \equiv \{(\varphi, \theta) \mid 0 \leq \varphi \leq 2\pi,\ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\}.$$

При актуализацията на кода да се прецизира знакът на нормалния вектор. Отговорът е

$$\Pi = \frac{a^2\pi(4 + a^2)}{4}.$$

```
> restart; with(linalg):  assume(a>0);
# инициализация
  pole:=[x*z, 0, 1]; r:=[a*cos(t)*sin(s),a*sin(t)*sin(s),a*cos(s)];
> # тангенциални вектори към повърхнината и нормален вектор
  rt:=diff(r,t); rz:=diff(r,s); nvect:=crossprod(rt,rz);
  daljina:= simplify(sqrt(  sum(nvect[i]^2, i=1..3) ));
  nvect0:=[seq(nvect[i]/daljina, i=1..3)];
> # коефициенти на Гаус
  E:=simplify(sum(rt[i]^2,i=1..3));
  F:=simplify(sum(rt[i]*rz[i],i=1..3));
  G:=simplify(sum(rz[i]^2,i=1..3));
> # повърхнинен елемент
  sigma:=simplify(sqrt(E*G-F^2));
> # подинтегрална функция на двойния интеграл
  pole1:=simplify(subs({x=r[1],y=r[2],z=r[3]},pole));
  f:=expand( sum(pole1[i]*nvect0[i], i=1..3) * sigma );
> # пресмятане на двойния интеграл
  f1:=int(f,t=0..2*Pi);
  flx:=int(f1,s=0..Pi/2);
```

Ето и бързо пресмятане:

```
> restart; with(VectorCalculus):
> Flux(VectorField(<x*z,0,1>,cartesian[x,y,z]),
Surface(<a,s,t>,s=0..Pi/2,t=0..2*Pi, coords=spherical) );
```

Задача 82. Да се пресметне потокът на векторното поле $\mathbf{p} = x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ по външната нормала на частта от коничната повърхнина $z = \sqrt{x^2+y^2}$, отсечена от цилиндъра $x^2 + y^2 = 2x$. Да се сравнят резултатите, получени след актуализация на кода от Задача 80.

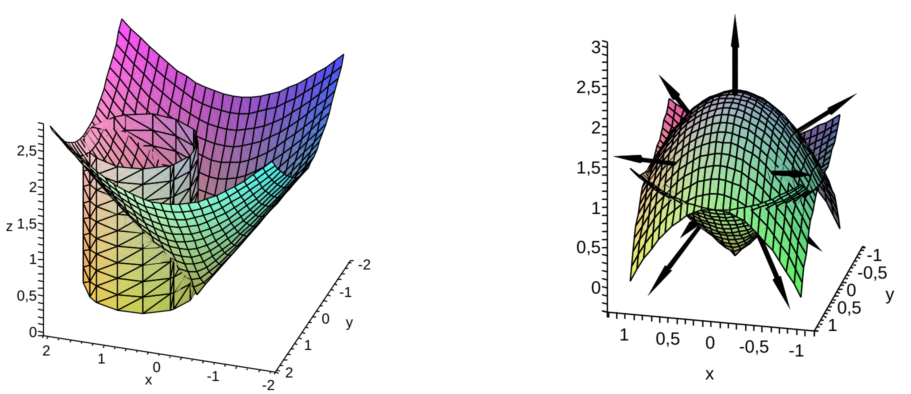
Решение: Частта от повърхнината, върху която търсим потока на векторното поле, допуска например следните параметрични уравнения:

$$S \equiv \{\mathbf{r} = \rho\cos\varphi\,\mathbf{i} + \rho\sin\varphi\,\mathbf{j} + \rho\,\mathbf{k} \mid (\rho, \varphi) \in D\},$$

а ортогоналната ѝ проекция в равнината $z = 0$ е кръг с център точката с координати $(1, 0)$ и радиус единица, който е криволинейният трапец

$$D \equiv \{(\rho, \varphi) \mid -0,5\pi \leq \varphi \leq 0,5\pi,\ 0 \leq \rho \leq 2\cos\varphi\}.$$

(Виж ФИГУРА 8(а)).



(а) Отворена повърхнина (б) Затворена повърхнина

ФИГУРА 8. Поток през отворена и затворена повърхнина.

Направените представяния са достатъчни, за да се актуализира кодът от задача 80. Да намерим потока без помощта на MAPLE, за да могат да се сравняват междинните резултати от кода. Тангенциалните вектори в произволна точка на гладката повърхнина са:

$$\mathbf{r}'_\varphi = (-\rho\sin\varphi, \rho\cos\varphi, 0),\ \mathbf{r}'_\rho = (\cos\varphi, \sin\varphi, 1),$$

а векторното им произведение е нормален вектор за повърхнината:

$$\mathbf{N} = \mathbf{r}'_\varphi \times \mathbf{r}'_\rho = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -\rho\sin\varphi & \rho\cos\varphi & 0 \\ \cos\varphi & \sin\varphi & 1 \end{vmatrix} = (\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, -\rho).$$

Дължината на нормалния вектор е

$$|\mathbf{N}| = \sqrt{(\rho\cos\varphi)^2 + (\rho\sin\varphi)^2 + (-\rho)^2} = \sqrt{2}\rho$$

Директорните косинуси са:

$$\frac{\sqrt{2}\cos\varphi}{2},\ \frac{\sqrt{2}\sin\varphi}{2},\ -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Пресмятат се коефициентите на Гаус и повърхнинният елемент:

$$E = \rho^2,\ F = 0,\ G = 2,\ \mathrm{d}\sigma = \sqrt{2}\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi.$$

$$\Pi = \iint\limits_S x\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z + 2y\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Потокът се получава след пресмятането на двойния интеграл:

$$\Pi = \iint\limits_D \left(\rho\cos\varphi\frac{\sqrt{2}\cos\varphi}{2} + 2\rho\sin\varphi\frac{\sqrt{2}\sin\varphi}{2} - \rho\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\sqrt{2}\rho\,\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi,$$

$$\Pi = \iint\limits_D \rho^2\sin^2\varphi\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi = \int\limits_{-0{,}5\pi}^{0{,}5\pi}\mathrm{d}\varphi\int\limits_0^{2\cos\varphi}\rho^2\sin^2\varphi\,\mathrm{d}\rho$$

$$= \int\limits_{-0{,}5\pi}^{0{,}5\pi}\left(\frac{8}{3}\sin^2\varphi\cos^3\varphi\right)\mathrm{d}\varphi = \frac{32}{45}.$$

Задача 83. Да се пресметне потокът на векторното поле $\mathbf{p} = 2yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} - x^2\mathbf{k}$ по външната нормала на затворената повърхнина $z = 2 - x^2 + y^2, z^2 = x^2 + y^2, z \geq 0$ и се проверят резултатите, след като се актуализира кодът от Задача 80 и се използва за горната и долната част на повърхнината.

Решение: Ротационният параболоид и конусът се пресичат в равнината $z = 1$. Ортогоналните им проекции върху равнината $z = 0$ съвпадат, и двете са централен кръг с радиус 1.

Да пресметнем потока Π_1 по частта от параболоида. В цилиндрични координати параметричните уравнения са:

$$S_1 \equiv \{\mathbf{r} = \rho\cos\varphi\,\mathbf{i} + \rho\sin\varphi\,\mathbf{j} + (2-\rho^2)\,\mathbf{k} \mid (\rho,\varphi) \in D\},$$

където

$$D \equiv \{(\rho,\varphi) \mid 0 \le \varphi \le 2\pi,\ 0 \le \rho \le 1\}.$$

(Виж ФИГУРА 5(б)). Тангенциалните вектори в произволна точка на гладката повърхнина са:

$$\mathbf{r}'_\varphi = (-\rho\sin\varphi, \rho\cos\varphi, 0),\ \mathbf{r}'_\rho = (\cos\varphi, \sin\varphi, -2\rho),$$

нормалният вектор към параболоида е

$$\mathbf{N}_1 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -\rho\sin\varphi & \rho\cos\varphi & 0 \\ \cos\varphi & \sin\varphi & -2\rho \end{vmatrix} = (-2\rho^2\cos\varphi, -2\rho^2\sin\varphi, -\rho).$$

Третата координата е отрицателна, следователно това е вътрешната нормала (Виж ФИГУРА 5(б)). Външната нормала е $-\mathbf{N}_1$. Следователно,

$$\Pi_1 = \iint\limits_{S_1} 2yzx\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z + xz\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x - x^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y =$$

$$\iint\limits_{D} \left[2\rho\sin\varphi\left(2-\rho^2\right)2\rho^2\cos\varphi + \rho\cos\varphi\left(2-\rho^2\right)2\rho^2\sin\varphi - \rho^2\cos^2\varphi\rho\right]\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi$$

Тогава

$$\Pi_1 = \iint\limits_{D} \rho^3[6(2-\rho^2)\sin\varphi\cos\varphi - \cos^2\varphi]\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi = -\frac{\pi}{4}.$$

Аналогично се пресмята потокът Π_2 по частта от конуса. В цилиндрични координати параметричните му уравнения са:

$$S_2 \equiv \{\mathbf{r} = \rho\cos\varphi\,\mathbf{i} + \rho\sin\varphi\,\mathbf{j} + \rho\,\mathbf{k}\},$$

където

$$D \equiv \{(\rho, \varphi) \mid 0 \le \varphi \le 2\pi,\ 0 \le \rho \le 1\}.$$

Тангенциалните вектори в произволна точка на гладката повърхнина са:

$$\mathbf{r}'_\varphi = (-\rho \sin\varphi, \rho\cos\varphi, 0),\ \mathbf{r}'_\rho = (\cos\varphi, \sin\varphi, 1),$$

и нормалният вектор е

$$\mathbf{N}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -\rho\sin\varphi & \rho\cos\varphi & 0 \\ \cos\varphi & \sin\varphi & 1 \end{vmatrix} = (\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, -\rho).$$

Това е външната нормала на конуса (Виж ФИГУРА 5(б)). Тогава

$$\Pi_2 = \iint\limits_{S_2} 2yzx\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z + xz\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x - x^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y =$$

$$\iint\limits_{D} \left[2\rho^2 \sin\varphi\rho\cos\varphi + \rho^2\cos\varphi\rho\sin + \rho^2\cos^2\varphi\rho\right]\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi$$

$$\Pi_2 = \iint\limits_{D} \rho^3(3\sin\varphi\cos\varphi + \cos^2\varphi)\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi = \frac{\pi}{4}.$$

Сумарният поток се получава

$$\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 = 0.$$

```
> restart; with(linalg):
assume(r>0);
pole:=[2*y*z, x*z, -x^2];
> rsurf:=[r*cos(t),r*sin(t),2-r^2];
 rsurft:=diff(rsurf,t); rsurfr:=diff(rsurf,r);
 nvect:=crossprod(rsurfr,rsurft);
 daljina:= simplify(sqrt(  sum(nvect[i]^2, i=1..3) ));
 nvect0:=[seq(nvect[i]/daljina, i=1..3)];
 E:=simplify(sum(rsurft[i]^2,i=1..3));
 F:=simplify(sum(rsurft[i]*rsurfr[i],i=1..3));
 G:=simplify(sum(rsurfr[i]^2,i=1..3));
 sigma:=simplify(sqrt(E*G-F^2));
```

```
> pole1:=simplify(subs({x=rsurf[1],y=rsurf[2],z=rsurf[3]},pole));
f:=expand( sum(pole1[i]*nvect0[i], i=1..3) * sigma );
f1:=int(f,t=0..2*Pi);
flx1:=int(f1,r=0..1);
> restart; with(linalg):
assume(r>0);
pole:=[2*y*z, x*z, -x^2];
> rsurf:=[r*cos(t),r*sin(t),r];
 rsurft:=diff(rsurf,t); rsurfr:=diff(rsurf,r);
 nvect:=crossprod(rsurft,rsurfr);
 daljina:= simplify(sqrt(  sum(nvect[i]^2, i=1..3) ));
 nvect0:=[seq(nvect[i]/daljina, i=1..3)];
 E:=simplify(sum(rsurft[i]^2,i=1..3));
 F:=simplify(sum(rsurft[i]*rsurfr[i],i=1..3));
 G:=simplify(sum(rsurfr[i]^2,i=1..3));
 sigma:=simplify(sqrt(E*G-F^2));
> pole1:=simplify(subs({x=rsurf[1],y=rsurf[2],z=rsurf[3]},pole));
f:=expand( sum(pole1[i]*nvect0[i], i=1..3) * sigma );
f1:=int(f,t=0..2*Pi);
flx2:=int(f1,r=0..1);
```

Векторното поле е соленоидално (тръбно), т.е. дивергенцията му е равна на нула.

Потокът в случай на затворена частично гладка повърхнина, какъвто е случаят в този пример, може да се пресметне и с формулата на Гаус-Остроградски.

5.3 Циркулация

Дефиниция 5.3.1. Нека L е гладка затворена несамопресичаща се крива и

$$\mathbf{v} = P(x,y,z)\mathbf{i} + Q(x,y,z)\mathbf{j} + R(x,y,z)\mathbf{k}$$

е векторно поле. Криволинейният интеграл от втори род

$$I = \oint\limits_L P(x,y,z)\,\mathrm{d}x + Q(x,y,z)\,\mathrm{d}y + R(x,y,z)\,\mathrm{d}z$$

се нарича циркулация на векторното поле по кривата L. Ако кривата може да се параметризира

$$L \equiv x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k},\ t \in [\alpha,\, \beta],$$

то циркулацията се пресмята чрез единичен определен интеграл:

$$I = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \left\{ P\left[x(t), y(t), z(t)\right] x' + Q\left[x(t), y(t), z(t)\right] y' + R\left[x(t), y(t), z(t)\right] z' \right\}\, \mathrm{d}t.$$

Задача 84. Пресметнете циркулацията на векторното поле $\mathbf{a} = x\mathbf{i} - z^2\mathbf{j} + y\mathbf{k}$ по затворения контур $L \equiv 2\cos t\mathbf{i} + 3\sin t\mathbf{j} + (4\cos t - 3\sin t - 3)\mathbf{k}$, $t \in [0, 2\pi]$.

Решение: Циркулацията се пресмята чрез определения интеграл:

$$I = \int\limits_{0}^{2\pi} \big[2\cos t(2\cos t)' - (4\cos t - 3\sin t - 3)^2(3\sin t)' +$$

$$3\sin t(4\cos t - 3\sin t - 3)'\big]\ \mathrm{d}t.$$

```
> restart: with(linalg):
  pole:=[x,-z^2,y];
  kontur:=[2*cos(t), 3*sin(t), 4*cos(t)-3*sin(t)-3];
> pole1:=subs(x=kontur[1],y=kontur[2],z=kontur[3],pole);
  tangenta:=diff(kontur,t);
> f:=sum(pole1[i]*tangenta[i],i=1..3);
  f:=simplify(f);
> int(f,t=0..2*Pi);
```

Отговор: 60π. Същият резултат се получава директно чрез

```
> restart;with(VectorCalculus):
> SetCoordinates('cartesian'[x,y,z]);
> LineInt(VectorField(<x,-z^2,y>),
Path(<2*cos(t),3*sin(t),4*cos(t)-3*sin(t)-3>,t=0..2*Pi));
```

Задача 85. Чрез актуализация на кода към задача 84 пресметнете циркулацията на векторното поле $\mathbf{a} = x^2y^3\mathbf{i} + \mathbf{j} + z\mathbf{k}$ по кривата

$$L = \left\{\ x^2 + y^2 = r^2,\ \ z = 0,\ \ r > 0.\ \right\}$$

Решение: Кривата се представя чрез следните параметрични уравнения:

$$L = \{\ x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,\ z = 0,\ \varphi \in [0, 2\pi]\ \}$$

и циркулацията се пресмята чрез определения интеграл:

$$I = \int_0^{2\pi} \left[(r\cos\varphi)^2(r\sin\varphi)^3(r\cos\varphi)' + (r\sin\varphi)'\right]\,\mathrm{d}\varphi.$$

Следният код е универсален относно равнини и пространствени задачи.

```
> restart: with(linalg):
>   Dekart:=[x,y,z]: assume(r>0):
>   pole:=[x^2*y^3,1,z]: n:=nops(pole):
>   kontur:=[r*cos(phi), r*sin(phi), 0]:
> pole1:=pole:
>   for i from 1 to n do
      pole1:=subs(op(i,Dekart)=kontur[i],pole1)
    od:
> tangenta:=diff(kontur,phi):
> f:=sum(pole1[j]*tangenta[j],j=1..n):
> int(f,phi=0..2*Pi);
```

Отговорът зависи от параметъра r: $-\dfrac{r^6\pi}{8}$.

```
> restart;with(VectorCalculus):
> SetCoordinates('cartesian'[x,y,z]);
> LineInt(VectorField(<x^2*y^3,y,z>),
Circle3D(<0,0,0>,r,<0,0,1>));
```

Задача 86. Намерете работата на силата $\mathbf{F} = (x^2 - 2y)\mathbf{i} + (y^2 - 2x)\mathbf{j}$ при преместването по отсечката MN от точка $M(-4;0)$ до точка $N(0;2)$.

Решение: Работата се пресмята чрез криволинеен интеграл по отсечката MN от векторното поле на силата. В кода от Задача 84 се прави актуализация на полето, на параметричните уравнения на кривата и съответно на интервала, в който се мени параметърът. Отрезовото уравнение на правата, минаваща през двете точки, е

$$\frac{x}{-4} + \frac{y}{2} = 1.$$

Което и да е от двете параметрични представяния

$$MN_1 \equiv t\mathbf{i} + (-0,5x+2)\mathbf{j},\ t \in [-4,0],$$

$$MN_2 \equiv (2t-4)\mathbf{i} + t\mathbf{j},\ t \in [0,2]$$

може да се използва за пресмятане на работата, като крайният резултат не зависи от параметричните уравнения. Ако се използва втората параметризация на отсечката, то циркулацията се пресмята чрез следния интеграл:

$$I = \int_0^2 \left\{ \left[(2t-4)^2 - 2t\right](2t-4)' + \left[t^2 - 2(2t-4)\right] \right\} \mathrm{d}t.$$

```
> restart: with(linalg):
>   Dekart:=[x,y,z]:
>   pole:=[x^2-2*y,y^2-2*x]: n:=nops(pole):
>   kontur:=[t, t/2+2]:
# kontur:=[2*t-4, t]:
> pole1:=pole:op(1,Dekart):
>   for i from 1 to n do
      pole1:=subs(op(i,Dekart)=kontur[i],pole1)
    od:
> tangenta:=diff(kontur,t):
> f:=sum(pole1[j]*tangenta[j],j=1..n):
> int(f,t=-4..0):
# int(f,t=0..2):
```

Отговор: 24. Решението би могло да се получи и чрез

```
> restart;with(VectorCalculus):
> SetCoordinates('cartesian'[x,y]);
> LineInt(VectorField(<x^2-2*y,y^2-2*x>),
Line(<-4,0>,<0,2>));
```

Задача 87. Намерете работата на силата $\mathbf{F} = (x+y)\mathbf{i} + (x-y)\mathbf{j}$ при преместването по кривата

$$L = \left\{\ x^2 + \frac{y^2}{9} = 1,\ \ x > 0,\ \ y > 0.\ \right\}$$

от точка $M(1;0)$ до точка $N(0;3)$.

Упътване: Интегрирането е по частта от елипса с полуоси с дължини 1 и 3, разположена в първи квадрант. Може да се използва една от трите параметризации на кривата:

$$L_1 \equiv \cos t\,\mathbf{i} + 3\sin t\,\mathbf{j},\ t \in [0, \frac{\pi}{2}],$$

$$L_2 \equiv t\,\mathbf{i} + \sqrt{9-t^2}\,\mathbf{j},\ t \in [1, 0],$$

$$L_3 \equiv \sqrt{1-\frac{t^2}{9}}\,\mathbf{i} + t\,\mathbf{j},\ t \in [0, 3].$$

Отговор: -5. Директно може да се използва

```
> restart;with(VectorCalculus):
> SetCoordinates('cartesian'[x,y]);
> LineInt(VectorField(<x+y,x-y>),
Arc(Ellipse(x^2+y^2/9=1),0,Pi/2));
```

5.4 Формули на Грийн-Гаус, Гаус-Остроградски и Стокс

Ще се формулират условията, при които тези формули са в сила. Записът на формулите в термините на векторния анализ е компактен.

Теорема на Грийн-Гаус. Нека ограниченото равнинно множество D има граница затворената равнина крива L и равнинното векторно поле $\mathbf{a} = P(x,y)\mathbf{i} + Q(x,y)\mathbf{j}$ има непрекъснати координатни функции, които имат непрекъснати частни производни $\dfrac{\partial P(x,y)}{\partial y}$ и $\dfrac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$. Тогава циркулацията на векторното поле по затворената равнина крива L е равна на двоен интеграл от $\dfrac{\partial Q(x,y)}{\partial x} - \dfrac{\partial P(x,y)}{\partial y}$ върху равнинното множество D, т. е.

$$\oint\limits_L \mathbf{a}d\mathbf{r} = \iint\limits_D \left(\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, \qquad (5.4.1)$$

където $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$. Да се сравни с (4.2.6).

Теорема на Гаус-Остроградски. Потокът на векторното поле **a** през затворената повърхнина S е равен на тройния интеграл от дивергенцията на векторното поле **a** върху крайното тяло V, ограничено от затворената повърхнина S. Да се сравни с (4.4.7):

$$\oiint\limits_{S} \mathbf{a}\,\mathbf{n}\,\mathrm{d}\sigma = \iiint\limits_{V} div\,\mathbf{a}\,\mathrm{d}v. \tag{5.4.2}$$

Повърхнината S и частните производни на векторното поле се предполагат (частично) гладки.

Теорема на Стокс. Циркулацията на векторното поле **a** по дължината на затворената крива L е равна на потока на ротора на това векторно поле през произволна, нанизана на затворената крива L повърхнина Σ:

$$\oint\limits_{L} \mathbf{a}\,\mathrm{d}\,\mathbf{r} = \iint\limits_{\Sigma} \mathbf{rot}\,\mathbf{a}\,\mathbf{n}\,\mathrm{d}\sigma, \tag{5.4.3}$$

където $\mathbf{n} = (\cos\alpha,\, \cos\beta\, \cos\gamma)$ е единичната нормала към повърхнината Σ. Виж (5.4.3). Кривата L и частните производни на векторното поле се предполагат (частично) гладки.

Задача 88. Да се пресметне циркулацията в положителна посока на векторното поле $\mathbf{a} = (2xy - x^2)\mathbf{i} + (x + y^2)\mathbf{j}$ по затворената линия

$$C \equiv \{(x, y) \mid y = x^2, x = y^2\}$$

чрез единични интеграли и чрез формулата на Грийн.

Решение:

Първи начин. Двете параболи се пресичат в координатното начало и в точка $A(1, 1)$. Да означим с C_1 дъгата от параболата с уравнение $y = x^2$ между пресечните точки:

$$C_1 \equiv \{(x, y) \mid x = t, y = t^2, t \in [0, 1]\},$$

а с C_2 - дъгата от параболата с уравнение $x = y^2$ между пресечните точки:

$$C_2 \equiv \{(x, y) \mid x = t^2, y = -t, t \in [-1, 0]\}.$$

Циркулацията c ще бъде сума от стойностите на два криволинейни интеграла по двете дъги:

$$c = \int\limits_{C_1} (2xy - x^2)\,\mathrm{d}x + (x + y^2)\,\mathrm{d}y + \int\limits_{C_2} (2xy - x^2)\,\mathrm{d}x + (x + y^2)\,\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^1 \left[(2t^3 - t^2) + (t + t^4 2t)\right] \mathrm{d}t + \int_{-1}^0 \left[(-2t^3 - t^4)2t + (t^2 + t^2)(-1)\right] \mathrm{d}t$$

$$= 2\left.\frac{t^6}{6}\right|_0^1 + 2\left.\frac{t^4}{4}\right|_0^1 + \left.\frac{t^3}{3}\right|_0^1 - 2\left.\frac{t^6}{6}\right|_{-1}^0 - 4\left.\frac{t^5}{5}\right|_{-1}^0 - 2\left.\frac{t^3}{3}\right|_{-1}^0 = \frac{1}{30}.$$

Втори начин. Прилага се формулата на Грийн-Гаус:

$$c = \iint_D \left[\frac{\partial(x + y^2)}{\partial x} - \frac{\partial(2xy - x^2)}{\partial y}\right] \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$$

$$= \iint_D (1 - 2x)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y, \quad D \equiv \{(x, y) \mid x \leqq y^2, y \geqq x^2\}.$$

Множеството, върху което се интегрира, е криволинеен трапец, т. е.

$$D \equiv \{(x, y) \mid x^2 \leqq y \leqq \sqrt{x}, 0 \leqq x \leqq 1\}.$$

и двойният интеграл се пресмята чрез последователни единични интеграли:

$$c = \int_0^1 \left[\int_{x^2}^{x} (1 - 2x)\, \mathrm{d}y\right] \mathrm{d}x = \int_0^1 (1 - 2x)(\sqrt{x} - x^2)\, \mathrm{d}x$$

$$= \left.\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right|_0^1 - \left.\frac{4}{5}x^{\frac{5}{2}}\right|_0^1 - \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1 + \left.\frac{x^4}{2}\right|_0^1 = \frac{1}{30}.$$

Задача 89. Да се пресметне циркулацията в положителна посока на векторното поле $\mathbf{a} = y\mathbf{i} + x^2\mathbf{j} - z\mathbf{k}$ по затворената линия

$$C \equiv \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 = 4, z = 1\}$$

непосредствено и чрез теорема на Стокс.

Решение:

Първи начин. Линията се намира в равнината $z = 1$ и представлява окръжност с център в точката $A(0, 0, 1)$ и радиус, равен на 2. Параметризираме затворената крива, като вземаме предвид посоката на обхождане (обратно на часовниковата стрелка)

$$C \equiv \{(x, y, z) \mid x = 2\cos t, y = 2\sin t, z = 1,\ t \in [0, 2\pi]\}.$$

Тогава циркулацията се пресмята чрез определения интеграл

$$c = \int_0^{2\pi} [2\sin t(2\cos t)' + 4\cos^2(2\sin t' - 1(1)'] \, \mathrm{d}t$$

$$= \int_0^{2\pi} (-4\sin t \cos t + 8\cos^3 t) \, \mathrm{d}t = -4\pi.$$

Втори начин. Роторът на векторното поле е равен на

$$\mathbf{rot\,a} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ y & x^2 & -z \end{vmatrix}$$

$$= \left[\frac{\partial(-z)}{\partial y} - \frac{\partial(x^2)}{\partial z}\right]\mathbf{i} + \left[\frac{\partial y}{\partial z} + \frac{\partial(-z)}{\partial x}\right]\mathbf{j} + \left[\frac{\partial x^2}{\partial x} - \frac{\partial(y)}{\partial y}\right]\mathbf{k} = (2x-1)\mathbf{k}.$$

На затворената равнинна крива надяваме кръг Σ с център в точката $A(0,0,1)$ и радиус, равен на 2. Съгласно ориентацията на кривата единичният нормален вектор към кръга е $\mathbf{n} = 1\mathbf{k}$. Прилагането на теоремата на Стокс води до пресмятането на потока на векторното поле на ротора през надяната повърхнина Σ:

$$c = \iint_\Sigma \mathbf{rot\,a\,k} \; d\sigma = \iint_\Sigma (2x-1) \, \mathrm{d}\sigma$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[\int_0^2 (2\rho\cos\varphi - 1)\rho \, \mathrm{d}\rho\right] \mathrm{d}\varphi = \int_0^{2\pi} \left[\cos\varphi \left.\frac{2\rho^3}{3}\right|_0^2 - \left.\frac{\rho^2}{2}\right|_0^2\right] \mathrm{d}\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[\frac{16\cos\varphi}{3} - 2\right] \mathrm{d}\varphi = \left.\frac{16\sin\varphi}{3}\right|_0^{2\pi} - 2\varphi|_0^{2\pi} = -4\pi.$$

Задача 90. Да се пресметне потокът на векторното поле $\mathbf{a} = y^2x\mathbf{i} + z^2y\mathbf{j} + x^2z\mathbf{k}$ по външната нормала на елипсоида

$$S \equiv \left\{(x,y,z) \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = R^2\right\},$$

където $a,\ b,\ c,\ R\ \in \mathbb{R}^+$, чрез теоремата на Гаус–Остроградски.

Решение:
Дивергенцията на векторното поле е

$$div\,\mathbf{a}\ = \frac{\partial(y^2x)}{\partial x} + \frac{\partial(z^2y)}{\partial y} + \frac{\partial(x^2z)}{\partial z}.$$

Като се приложи теоремата на Гаус–Остроградски, за потока се получава

$$\Pi = \iiint\limits_{V} (x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}v,$$

където

$$V \equiv \left\{(x,y,z) \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leqslant R^2\right\}.$$

В новата координатна система $Or\theta\varphi$

$$\left|\begin{array}{l} x = ar\sin\theta\cos\varphi, \\ y = br\sin\theta\sin\varphi, \\ z = cr\cos\theta, \end{array}\right.$$

Като се вземе предвид стойността на Якобиана

$$J = \frac{D(x,y,z)}{D(r,\theta,\varphi)} = abc\,r^2\sin\theta,$$

потокът се пресмята чрез тройния интеграл

$$\Pi = \iiint\limits_{\overline{V}} [(ar\sin\theta\cos\varphi)^2 + (br\sin\theta\sin\varphi)^2 + (cr\cos\theta)^2]abc\,r^2\sin\theta\ \mathrm{d}v,$$

където интегрирането се извършва върху образа на елипсоида

$$\overline{V} \equiv \{(r,\theta,\varphi) \mid 0 \leqslant r \leqslant R,\ 0 \leqslant \theta \leqslant \pi,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi\}.$$

$$\Pi = a^3bc\ \iiint\limits_{\overline{V}}\ r^4\sin^3\theta\cos^2\varphi\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi + ab^3c\ \iiint\limits_{\overline{V}}\ r^4\sin^3\theta\sin^2\varphi\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$$

$$+abc^3\ \iiint\limits_{\overline{V}}\ r^4\cos^2\theta\sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi.$$

Тъй като подинтегралните функции са произведения на функции, зависещи само от една променлива, могат да се използват следните единични интеграли:

$$I_1 = \int\limits_0^R r^4\,\mathrm{d}r = \left.\frac{r^5}{5}\right|_0^R = 0,2R^5,$$

$$I_2 = \int\limits_0^\pi \sin^3\theta\,\mathrm{d}\theta = \int\limits_0^\pi (\cos^2\theta - 1)\,\mathrm{d}\cos\theta = \left.\left[\frac{\cos^3\theta}{3} - \cos\theta\right]\right|_0^\pi = \frac{4}{3},$$

$$I_3 = \int\limits_0^{2\pi} \cos^2\varphi\,\mathrm{d}\varphi = \int\limits_0^{2\pi} \frac{1+\cos 2\varphi}{2}\,\mathrm{d}\varphi = \pi,$$

$$I_4 = \int\limits_0^{2\pi} \sin^2\varphi\,\mathrm{d}\varphi = \int\limits_0^{2\pi} (1-\cos^2\varphi)\,\mathrm{d}\varphi = 2\pi - \pi = \pi,$$

$$I_5 = \int\limits_0^\pi \cos^2\theta\,\sin\theta\mathrm{d}\theta = -\left.\frac{\cos^3\theta}{3}\right|_0^\pi = \frac{2}{3},$$

и окончателно

$$\Pi = \frac{2}{15}abcR^5(2a^2\pi + 2b^2\pi + c^2).$$

5.5 Задачи и отговори

1. Дадено е скаларното поле $U(x,y,z) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z}$. Да се провери тъждество ли е $\mathbf{rot}\,[\mathbf{grad}\,(U)] = \overrightarrow{0}$. Да.

2. За скаларното поле $U(x,y,z) = \sin(3x - y + z)$ да се провери вярна ли е зависимостта
   $\nabla^2 U = \Delta U$. Да.

3. За векторното произведение на двете векторни полета
   $\mathbf{a} = (y,2,0)$ и $\mathbf{b} = (0,x,z)$ намерете дивергенцията и ротора.
   $-z, \quad (x+y)\mathbf{i} + (2-y)\mathbf{j}$

4. Соленоидално ли е векторното поле $\mathbf{a} = (x^2 + 4y^2 - z^3)\mathbf{i} + (-3xy + zx^2)\mathbf{j} + (xz + \sqrt{x}y)\mathbf{k}$? Да.

5. Намерете производната на скаларното поле

$$u(x, y, z) = x^2\sqrt{y} + y^2\sqrt{z} + z^2\sqrt{x}$$

в точката $M_0(4; 4; 1)$ по посока на окръжността $\{x^2 + y^2 = 32, z = 1\}$. $-\dfrac{17\sqrt{2}}{8}$

6. Да се намери фамилията от векторни линии на полето $\mathbf{a} = (x + 2y, -y)$. $x = e^y\left(C - \dfrac{2}{y}\right)$

7. Да се намери фамилията от векторни линии на полето $\mathbf{a} = (y, -x)$. $x^2 + y^2 = C$

8. Да се намери фамилията от векторни линии на полето $\mathbf{a} = (y, x, x-y)$. $x^2 - y^2 = C_1,\ x - y + z = C_2$

9. Да се намери фамилията от векторни линии на полето $\mathbf{a} = (x - z, y - z, 2z)$. $(x - y)^2 = C_1 z,\ \sqrt{z}\left(y + \dfrac{z}{3}\right) = C_2$

10. Намерете всички функции $\varphi(x)$, за които дивергенцията на полето

$$\mathbf{a} = \varphi(x)\mathbf{i} + \varphi(x)(y + z)\mathbf{j} + \varphi(x)(y - 3z)\mathbf{k}$$

е равна на нула. $\varphi(x) = Ce^{2x}$

11. Да се докаже, че полето

$$\mathbf{a} = \frac{-1}{x^2 + y^2}\mathbf{i} + \frac{1}{x^2 + y^2}\mathbf{j} + 2z\mathbf{k}$$

е потенциално, и да се намери скаларният му потенциал. $U(x, y, z) = \arctan\dfrac{y}{x} + z^2 + C$

12. Означаваме $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ и $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Да се намерят всички функции $\varphi(r)$, за които е изпълнено $div(\varphi(r)\mathbf{r}) = 2\varphi(r)$. $\varphi(r) = \dfrac{C}{r}$

13. Да се пресметне потокът на векторното поле $\mathbf{a} = (2x-z)\mathbf{i}+(4x+y)\mathbf{j}+(z-3y)\mathbf{k}$ през равнината на триъгълника с върхове $A(1,0,0),\ B(0,1,0)$ и ; $C(0,0,1)$ по посока на нормалата на равнината, която сключва остър ъгъл с оста Oz. $0,5$

14. Да се пресметне потокът на векторното поле $\mathbf{a} = (y^2+z^2)\mathbf{i} - (x^2+z^2)\mathbf{j} + (xy)\mathbf{k}$ през пълната повърхнина на пресечения конус $x^2+y^2 = z^2,\ 1 \leqslant z \leqslant 2$. 0

15. Дадено е векторното поле $\mathbf{a} = x^2\mathbf{i}+y^2\mathbf{j}+z^2\mathbf{k}$. Да се пресметне потокът на това векторно поле през външната страна на частта от хиперболоида $x^2+y^2 = 9-z$, отсечена от равнината $z = 0$. -243π

16. Да се пресметне потокът на векторното поле $\mathbf{a} = (x^2+2y)\mathbf{i} + (y^2-x)\mathbf{j} + (-z^2+4x)\mathbf{k}$ през външната страна на сферата $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2 = 1$. 16π

17. Намерете работата на силата $\mathbf{F} = -y\mathbf{i}+x\mathbf{j}+z\mathbf{k}$ по начупената линия с върхове $A(0,0,0),\ B(-1,2,1)$ и $C(0,1,-1)$ от А до С през В. $-\dfrac{4}{3}$

18. Намерете работата на силата $\mathbf{F} = x^2\mathbf{i} - y^2\mathbf{j}$ по дъгата от спиралата на Архимед с уравнение $r = \varphi$ в полярни координати, ако полярният ъгъл φ се изменя в интервала $[0,\pi]$. $\dfrac{\pi^3}{3}$

19. Да се пресметне циркулацията на векторното поле
$$\mathbf{a} = (y-z)\mathbf{i} + (z-x)\mathbf{j} + (x-y)\mathbf{k}$$
по затворената крива $L \equiv \{x = 2\cos t,\ y = 2\sin t,\ z = 1,\ 0 \leqslant t \leqslant \pi.\}$
-8π

20. Да се пресметне циркулацията на векторното поле
$$\mathbf{a} = 3xy\mathbf{i} - yz\mathbf{j} + xz\mathbf{k}$$
по пространствената затворена крива, която се получава при пресичане на цилиндъра $x^2+y^2 = 1$ с равнината $x+y-z = 1$. π

Библиография

[1] Д. Дойчинов (2006), *Математически анализ,* Университетско изд. “Св. Климент Охридски”, София.

[2] Л. Д. Кудрявцев (2003), *Курс математического анализа, том 1-3*, Издательство “Дрофа”, Москва.

(http://www.alleng.ru/d/math/math98.htm)

[3] И. И. Ляшко, А. К. Боярчук, Я. Г. Гай (1979), *Справочное пособие по математическому анализу, том 1-2,* Издательское обьединение “Вища школа”, Киев.

[4] Г. Фихтенголц (1966), *Курс диференциального и интегрального исчисления, том 1-3*, Издательство “Наука”, Москва.

[5] T. Stancheva (2007), Differential equations with MAPLE, Proceedings of the XXXIII Summer Conference “Applications of Mathemathics in Engeneering and Economics’33”, Sozopol’2007, American Institute of Physics Conference Proceedings, vol. 946.

[6] W. F. Trench (2012), *Introduction to real analysis,* San Antonio, Texas, USA,

(http: ramanujan.math.trinity.edu/wtrench /texts/ TRENCH_REAL_ANALYSIS.PDF)

МАТЕМАТИЧЕСКИ АНАЛИЗ 2

С ПОМОЩТА НА MAPLE

Ръководство

Автори:
© доц. д-р Йорданка Панева-Коновска
© гл. ас. Татяна Станчева

Рецензент:
© доц. д-р Весела Пашева

Стилова редакция:
© Стояна Саева

Даден за печат: м. април 2014 г.
Излязъл от печат: м. април 2014 г.
Печатни коли: 8.25
Поръчка № 3 с
Тираж 100 броя
Цена 15.30 лв.

Формат 60/84/16
ISBN: 978-619-167-099-4

Издателство и печат - Техническия университет – София

гр. София, бул. Климент Охридски 8, тел. 02 965 22 26